CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. HACHETTE.

N°. 8. *Mai* 1807.

§. I. ANALYSE APPLIQUÉE A LA GÉOMÉTRIE.

Solution analytique de la pyramide triangulaire, comprenant la Trigonométrie sphérique; par M. HACHETTE.

J'AI donné dans le troisième numéro de cette Correspondance, la solution géométrique de la pyramide triangulaire; la solution analytique n'est pas moins nécessaire aux élèves de l'École Polytechnique, puisque dans la première année du cours d'études, ils apprennent la théorie et la pratique des levées des terreins. M. Lagrange a donné dans le sixième cahier du Journal de l'École, un mémoire qui ne laisse rien à desirer sur cette partie de l'application de l'algèbre à la géométrie; comme elle n'est pas exigée pour l'admission à l'École, j'ai cru devoir en faire l'objet de quelques leçons, en y ajoutant quelques modifications conformes au programme de mon cours de Géométrie et d'Analyse appliquée.

Il n'y a dans un triangle sphérique que six élémens; les trois côtés et les trois angles; mais trois de ces élémens suffisent pour déterminer les trois autres. Ainsi, les relations les plus simples ne peuvent être qu'en quatre élémens; or, les combinaisons de six élémens, quatre en quatre, se réduisent à quatre cas, donc il n'y a aussi que quatre équations nécessaires pour résoudre tous les cas d'un triangle sphérique. M. Lagrange déduit ces quatre équations d'une équation fondamentale, que nous trouverons par des considérations du genre de celles que nous

avons employées dans la solution géométrique citée plus haut.

Nous allons d'abord faire connoître le théorême sur la surface du triangle sphérique, énoncé en 1629 par Albert Gérard, et démontré en 1632 par Cavalleri.

De la surface d'un triangle sphérique.

THÉORÊME.

I. L'aire d'un triangle sphérique est à la surface entière de la sphère, comme l'excès des trois angles du triangle sur deux angles droits est à huit angles droits.

Démonstration. Soit (fig. 1, pl. 1) $ABA'B'$ le grand cercle d'une sphère, $BCB'C'$, $ACA'C'$ les projections de deux autres grands cercles sur le plan du premier, il s'agit de trouver la surface du triangle sphérique qui a pour projection sur le même plan la figure ABC ou $A'B'C'$ composée d'un arc de cercle et des deux arcs d'ellipse.

L'hémisphère $ABA'B'C$ comprend : 1°. le fuseau sphérique $ABCA'$; 2°. le fuseau $ABCB'$ diminué du triangle sphérique ABC; 3°. le fuseau $A'B'C'C$ diminué du triangle sphérique $A'B'C'$; or, en prenant le rayon de la sphère pour l'unité, et nommant π la circonférence de son grand cercle; les angles A, B, C du triangle sphérique seront mesurés par des portions de π que nous désignons par A, B, C. La surface de la sphère aura pour expression 2π; elle sera au fuseau $ABCA'$ dans le rapport de π à A, d'où il suit que la surface de ce fuseau sera $2A$. Par la même raison, les deux fuseaux $ABCB'$, $A'B'C'C$ auront pour expressions de leurs surfaces $2B$ et $2C$; donc on aura l'équation

$$\text{surface de l'hémisphère} = \pi = 2A + (2B - T') + (2C - T),$$

et par conséquent

$$T = A + B + C - \frac{\pi}{2};$$

mais la surface entière de la sphère vaut 2π; en la nommant S, on aura $S = 2\pi$; de ces deux équations on déduit le théorême énoncé,

$$T : S :: A + B + C - \frac{\pi}{2} : 2\pi.$$

Sur les rapports entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique.

PREMIÈRE PROPOSITION.

II. Les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés à ces angles.

Démonstration.

Joignant (fig. 1) les trois points A, B, C, et le centre O de la sphère par des droites, on forme une pyramide triangulaire $OACB$, qui a les mêmes angles que le triangle sphérique ABC, et dont les faces sont les côtés a, b, c de ce triangle; supposons cette pyramide développée sur le plan de la face AOB, les angles (fig. 2) COB, $C'OA$, AOB auront pour mesures les côtés a, b, c; construisant en DEG l'angle A opposé à la face a, et en $D'FG$ l'angle B opposé à la face b, et prenant $OC = OC'$ pour le rayon des tables, on aura $DG = \sin A \sin b$, et $D'G = \sin B \sin a$, et à cause de $DG = D'G$ par construction,

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \sin A \sin b = \sin B \sin a; \\ \text{d'où l'on déduit} & \\ (2) & \sin A : \sin B :: \sin a : \sin b; \\ \text{on trouveroit de même} & \\ (3) & \sin A : \sin C :: \sin a : \sin c \\ (4) & \sin B : \sin C :: \sin b : \sin c \end{array}\right\} \ldots\ldots (A).$$

Donc les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés à ces angles.

DEUXIÈME PROPOSITION.

III. a, b, c étant les côtés d'un triangle sphérique, A l'angle opposé à l'un quelconque a de ces côtés, on a l'équation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Démonstration.

Menant GH et EK (fig. 2), l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à OF, on aura $OF = \cos a = OK + KF = OK + GH$,

$OK = \cos b \cos c$, $GH = EG \sin c$; mais $EG = \sin b \cos A$, donc $GH = \sin b \sin c \cos A$, donc

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ (2) & \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ (3) & \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{array}\right\} \ldots\ldots (B).$$

Premier corollaire.

Les faces de la pyramide supplémentaire sont $180° - A$, $180° - B$, $180° - C$, les cosinus des deux premiers sont $-\cos A$ et $-\cos B$, l'angle opposé à la face $180° - A$ est $180° - a$; dont le cosinus est $-\cos a$; donc pour cette pyramide supplémentaire, les équations (B) se changeront en

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & -\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a \\ (2) & -\cos B = \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b \\ (3) & -\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c \end{array}\right\} \ldots (C).$$

Second corollaire.

La valeur de $\cos c$, donnée par la troisième des équations (B), étant substituée dans la première de ces équations, on a..... $\cos a = \cos a \overline{\cos b^2} + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A$, à cause de $\overline{\cos b^2} = 1 - \overline{\sin b^2}$, et du facteur commun $\sin b$,

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A.$$

Prenant dans la seconde des équations (A) pour $\sin c$ la valeur suivante, $\sin c = \dfrac{\sin a \sin C}{\sin A}$, et la substituant dans la dernière équation, elle devient

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos C \\ \multicolumn{2}{l}{\textit{et par analogie}} \\ (2) & \cot a \sin c = \cot A \sin B + \cos c \cos B \\ (3) & \cot b \sin a = \cot B \sin C + \cos a \cos C \\ (4) & \cot b \sin c = \cot B \sin A + \cos c \cos A \\ (5) & \cot c \sin a = \cot C \sin B + \cos a \cos B \\ (6) & \cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos b \cos A \end{array}\right\} \ldots . (D).$$

IV. Les quatre systêmes d'équations (A), (B), (C), (D) comprennent la solution de toutes les équations de trigonométrie sphérique, car elles donnent les quatre relations simples qui existent entre les six élémens du triangle sphérique.

Le premier systême donne la relation entre deux côtés et deux angles opposés à ces côtés.

Le second systême donne la relation entre les trois côtés et un angle,

Le troisième systême entre trois angles et un côté,

Le quatrième entre deux côtés et deux angles, dont l'un est opposé et l'autre adjacent au même côté donné.

Lorsque le triangle sphérique est rectangle, un des angles, A, par exemple, est droit, et les équations (1) des systêmes (A), (B), (C), (D), deviennent:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \sin a = \dfrac{\sin b}{\sin B} \\ (2) & \cos a = \cos b \cos C \\ (3) & \cos a = \cot B \cot C \\ (4) & \cot a = \cot b \cos C \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (E).$$

Lorsque l'angle C est droit, les équations (1) des systêmes (C) et (D) donnent

$$\left.\begin{array}{ll} (5) & \cos A = \sin B \cos a \\ (6) & \cot A = \cot a \sin b \end{array}\right\}$$

Les six équations (E) donnent directement la solution de tous les cas des triangles sphériques rectangles, et comme elles sont sous une forme commode pour l'emploi des logarithmes, on s'en sert communément dans la trigonométrie, en décomposant tous les triangles en triangles rectangles par l'abaissement d'une perpendiculaire, ainsi qu'on va le voir dans la solution des problêmes suivans.

PREMIER PROBLÊME.

V. De ces quatre angles, deux côtés a et b et deux angles opposés A et B, trois étant donnés, déterminer le quatrième?

Solution. Ce problême en comprend deux, ou l'on demand A en a, b et B, ou a en b, A, B.

Le systême des équations (A) donne

$$\sin A = \frac{\sin a \sin B}{\sin b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

$$\sin a = \frac{\sin b \sin A}{\sin B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Ces formules n'ont besoin d'aucune transformation pour l'application des logarithmes.

SECOND PROBLÈME.

VI. De ces quatre angles, trois côtés a, b, c, et un angle A, trois étant donnés, déterminer le quatrième.

Solution. Cette question en comprend trois,

1°. Déterminer A par a, b, c;
2°. a par b, c et A;
3°. b par a, c et A.

Par l'équation (1) du système (A), on a

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

d'où l'on tire

$$1 + \cos A = 2\left(\cos \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\cos a - \cos (b+c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{(b+c-a)}{2} \sin \frac{b+c+a}{2}}{\sin b . \sin c},$$

$$1 - \cos A = 2\left(\sin \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\cos (b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{a-b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin b . \sin c};$$

donc $$\operatorname{tang} \frac{A}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a-b+c}{2}}{\sin \frac{b+c+a}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}} \right)} \quad \ldots (c).$$

équation qui détermine l'angle A par les trois côtés a, b et c.

M. Monge a donné pour ce cas une solution géométrique extrêmement simple et très-élégante ; il eut la bonté de me l'envoyer en 1792 pour l'école d'hydrographie de Collioure et Port Vendres; elle sera facilement comprise des élèves de l'École Polytechnique ; la fig. 3 étant construite ainsi qu'il est dit parag. III, en nommant x l'angle LGK des deux faces a et b, on aura

$$LF = 2 \sin \frac{x}{2} \quad GF = 2\, BG \sin \frac{x}{2} = 2 \sin a \sin \frac{x}{2}$$

$$= \sqrt{BF \times KF} = \sqrt{2 \sin a \times KF},$$

d'où l'on tire, $\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{KF}{2 \sin a}$.

L'angle EKF égale la face b, donc dans le triangle EKF, on aura

$$\sin b : EF :: \sin KEF : KF = \frac{EF \sin KEF}{\sin b},$$

et par conséquent $\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{EF \sin KEF}{2 \sin a \sin b}$,

$$EF = 2 \sin . \text{arc} \frac{EF}{2} = 2 \sin \left(\frac{a+b+c-2a}{2}\right)$$

$$= 2 \sin \left(\frac{b+c-a}{2}\right),$$

$$\sin KEF = \sin \frac{IF}{2} = \sin \left(\frac{2c-(a+b+c-2a)}{2}\right)$$

$$\sin KEF = \sin \left(\frac{a+c-b}{2}\right);$$

substituant ces valeurs dans celle de $\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2$, on a

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin \left(\frac{b+c-a}{2}\right) \sin \left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\sin a \sin b}\right)},$$

Le triangle BGL donne

$$1 : 2\cos\frac{x}{2} :: BG : BL = 2\sin a\cos\frac{x}{2};$$

$$BK = \frac{\overline{BL}^2}{BF} = 2\sin a\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2.$$

Dans le triangle BKE, on a

$$\sin b : BE :: \sin BEK : BK = \frac{BE\sin BEK}{\sin b};$$

donc
$$\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{BE\sin BEK}{2\sin a\sin b},$$

$$BE = 2\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$\sin BEK = \sin\frac{BI}{2} = \sin\left(\frac{a+b+c-2c}{2}\right),$$

donc
$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a\sin b}\right)}.$$

Les valeurs de $\sin\frac{x}{2}$ et $\cos\frac{x}{2}$ donnent

$$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}\right)}.$$

C'est de cette formule dont on fait usage pour réduire un angle à l'horison.

2°. Il s'agit de déterminer le côté a par l'angle A qui lui est opposé et par les deux côtés b et c.

La première des équations (B) donne

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A.$$

Soit fait, $\tan g\, c\cos A = \tan g\,\varphi$ ..... (d),

on aura, $\sin c\cos A = \cos c\tan g\,\varphi$;

donc $\cos a = \cos c\,(\cos b + \sin b \operatorname{tang} \varphi)$,

$$= \cos c \left(\frac{\cos b \cos \varphi + \sin b \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)$$

$$\cos a = \frac{\cos c \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e).$$

3°. On demande le côté b au moyen des deux autres côtés a et c, et d'un angle A opposé à l'un de ces côtés.

L'équation (e) donne $\cos (b - \varphi) = \dfrac{\cos a \cos \varphi}{\cos . c} \ldots\ldots (f)$,

l'angle φ étant connu par l'équation (d), l'angle b le sera aussi.

L'équation (d) peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{\operatorname{tang} \varphi} \cos A = \frac{1}{\operatorname{tang} . c}, \quad \text{ou } \cot . c = \cot \varphi . \cos A,$$

qui correspond à la quatrième des équations (E) (parag. IV), et qui indique que les deux côtés c et φ appartiennent à un triangle sphérique rectangle, dans lequel le côté c est opposé à l'angle droit, d'où l'on voit que la transformation employée pour la résolution des deux derniers cas, revient à la division du triangle sphérique en deux triangles rectangles, au moyen d'un arc φ mené par le sommet de l'angle B perpendiculairement sur le côté qui est opposé à cet angle.

TROISIÈME PROBLÈME.

VII. De ces quatre angles, deux côtés a et b, et deux angles A et C, trois étant donnés, trouver le quatrième?

Solution. Ce problème en renferme quatre, savoir:

Trouver, 1°. A par a, b, C;
2°. a par b, A, C;
3°. C par a, b, A;
4°. b par a, A, C.

Premier cas. La première des équations (D) (parag. III) donne

$$\cot A = \frac{\cot . a \sin b}{\sin . C} - \cot . C \cos b.$$

Pour la réduire en facteurs, on fera

$$\cot . a = \cos \varphi \cos C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

substituant cette valeur

$$\cot A = \cot . C (\cot \varphi \sin b - \cos b) = \frac{\cot C \sin (b - \varphi)}{\sin \varphi},$$

donc $$\cot . A = \frac{\cot . C \sin (b - \varphi)}{\sin \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h).$$

Cette réduction revient à diviser le triangle en deux rectangles par une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle B sur le côté opposé b, et l'angle subsidiaire φ est le segment de ce côté adjacent à l'angle C.

Second cas. Déterminer a par b, A, C?

La première des équations (D) (parag. III) donne

$$\cot . a = \frac{\cot . A \sin C}{\sin b} + \cot . b \cos . C.$$

Pour la réduire en facteurs, soit fait

$$\cot . A = \cos b \tang . \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i).$$

Substituant on a

$$\cot . a = \cot b (\sin C \tang \varphi + \cos . C)$$

$$= \frac{\cot b}{\cos . \varphi} (\sin C \sin \varphi + \cos C \cos \varphi) = \frac{\cot b \cos (C - \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$= \frac{\cot . b \cos (C - \varphi)}{\cos \varphi} = \cot . a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (k).$$

Cette réduction revient encore à diviser le triangle en deux rectangles, en abaissant une perpendiculaire de l'angle C sur le côté c; car en nommant φ l'angle du plan de cette perpendiculaire avec le côté b opposé à l'angle droit, l'équation (i) correspond à la troisième des équations (E), (paragraphe IV), qui est $\cos a = \cot B \cot C$, et qu'on peut mettre sous la forme de l'équation (i), $\cos a \tang C = \cot B$.

Troisième cas. Déterminer C par a, b, A?

Ayant trouvé l'angle φ par l'équation (i), l'équation (h) donnera

$$\cos (C - \varphi) = \frac{\cot a \cos \varphi}{\cot . b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (l).$$

Quatrième cas. Déterminer b par a, A, C?

Ayant trouvé l'angle subsidiaire φ par l'équation (g)..... $\cos\varphi = \frac{\cot a}{\cos C}$, l'équation (h) donnera

$$\sin(b-\varphi) = \frac{\cot.A \sin\varphi}{\cot.C} \ldots\ldots\ldots (m).$$

QUATRIEME PROBLÈME.

VIII. De ces quatre angles d'un triangle sphérique, les trois angles A, B, C et un côté a, trois étant donnés, trouver le quatrième?

Premier cas. Déterminer a par A, B, C?

Nommant A', B', C' les angles du triangle supplémentaire, et a', b', c' les côtés opposés à ces angles, on aura

$$A' = 180^\circ - a \quad B' = 180^\circ - b \quad C' = 180^\circ - c.$$
$$a' = 180^\circ - A \quad b' = 180^\circ - B \quad c' = 180^\circ - C.$$

Par l'équation (c) du paragraphe (VI), on a

$$\text{tang.}\frac{A'}{2} = \sqrt{\left\{\frac{\sin\frac{a'+b'-c'}{2}\sin\frac{a'-b'+c'}{2}}{\sin\frac{a'+b'+c'}{2}\sin\frac{b'+c'-a'}{2}}\right\}};$$

cette équation se transforme en celle-ci

$$\cot.\frac{a}{2} = \sqrt{\left\{\frac{\cos\frac{A+B-C}{2}\sin\frac{A-B+C}{2}}{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}}\right\}}.$$

Second cas. Déterminer A par a, B, C?

Les équations (d) et (e), appliquées au triangle supplémentaire, deviennent

$$\text{tang.}c'\cos A' = \text{tang}\,\varphi',\ \cos a' = \frac{\cos.c'\cos(b'-\varphi')}{\cos\varphi'},$$

faisant $\varphi' = 90^\circ - \phi$, ces deux équations deviennent

$$\text{tang}\,C\cos a = \cot.\phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (o).$$

$$\cos A = \frac{\cos C \sin (B - \varphi)}{\sin \varphi} \ldots\ldots\ldots (p).$$

Troisième cas. Déterminer B par a, A, C?
Ayant trouvé φ par l'équation (o), l'équation (p) donnera

$$\sin (B - \varphi) = \frac{\cos A \sin \varphi}{\cos . C} \ldots\ldots\ldots (q).$$

De la résolution d'un triangle sphérique dont on connoît les trois côtés, en supposant ces côtés très-petits par rapport au rayon de la sphère sur laquelle on les a mesurés.

IX. Lorsque les longueurs des côtés des triangles sphériques sont très-petites par rapport au rayon de la sphère, les tables trigonométriques n'offrent plus une précision suffisante pour le calcul des angles et des côtés; il est nécessaire dans ce cas d'avoir recours à une solution telle qu'on puisse estimer les différentes parties du triangle à une quantité de l'ordre $\frac{1}{r^n}$, r étant le rayon de la sphère, et n un nombre entier d'autant plus grand, que l'approximation est plus exacte; pour arriver à cette solution, qu'on reprenne l'équation (1) du paragraphe (III)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Soient α, $\mathfrak{C}$, γ les longueurs des côtés mesurés sur la sphère du rayon r, les côtés a, b, c deviendront $\frac{\alpha}{r}$, $\frac{\mathfrak{C}}{r}$, $\frac{\gamma}{r}$, et l'équation précédente se changera en celle-ci

$$\cos A = \frac{\cos \frac{\alpha}{r} - \cos \frac{\mathfrak{C}}{r} \cos \frac{\gamma}{r}}{\sin \frac{\mathfrak{C}}{r} . \sin \frac{\gamma}{r}}.$$

Les développemens connus pour $\sin x$ et $\cos x$ donnent

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Faisant successivement $x = \frac{\alpha}{r}$, $x = \frac{\zeta}{r}$; $x = \frac{\gamma}{r}$, et négligeant les quantités au-dessous de l'ordre $\frac{1}{r^4}$, on aura

$$\cos\frac{\alpha}{r} = 1 - \frac{\alpha^2}{2r^2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4r^4}$$

$$\cos\frac{\zeta}{r} = 1 - \frac{\zeta^2}{2r^2} + \frac{\zeta^4}{2.3.4r^4}; \quad \sin\frac{\zeta}{r} = \frac{\zeta}{r} - \frac{\zeta^3}{2.3r^3}$$

$$\cos\frac{\gamma}{r} = 1 - \frac{\gamma^2}{2r^2} + \frac{\gamma^4}{2.3.4r^4}; \quad \sin\frac{\gamma}{r} = \frac{\gamma}{r} - \frac{\gamma^3}{2.3r^3}.$$

Substituant ces valeurs, effectuant les produits en négligeant les termes au-dessous de l'ordre $\frac{1}{r^4}$, on a

$$\cos A = \frac{\frac{\zeta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4-\zeta^4-\gamma^4}{2.3.4r^2} - \frac{\zeta^2\gamma^2}{4r^2}}{\zeta\gamma\left(1 - \frac{(\zeta^2+\gamma^2)}{2.3r^2}\right)};$$

or $\frac{1}{1 - \frac{(\zeta^2+\gamma^2)}{2.3r^2}}$ donne (en effectuant la division) pour quotient approché jusqu'à la quantité au-dessous de $\frac{1}{r^4}$, $1 + \frac{\zeta^2+\gamma^2}{2.3r^2} - \frac{(\zeta^2+\gamma^2)}{4.9.r^4}$. Substituant au lieu du facteur ce quotient, on a

$$\cos A = \frac{\frac{\zeta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4-\zeta^4-\gamma^4}{2.3.4r^2} - \frac{\zeta^2\gamma^2}{4r^2} + \frac{(\zeta^2+\gamma^2)(\zeta^2+\gamma^2-\alpha^2)}{4.3r^2} - \frac{(\zeta^2+\gamma^2)^2(\zeta^2+\gamma^2-\alpha^2)}{2.4.9r^4}}{\zeta\gamma}$$

négligeant le terme divisé par r^4,

$$\cos A = \frac{\zeta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\zeta\gamma} + \frac{\alpha^4+\zeta^4+\gamma^4-2\alpha^2\zeta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\zeta^2\gamma^2}{2.3.4\,\zeta\gamma r^2}.$$

Si on suppose le rayon r infini, ou $\frac{1}{r} = 0$, la surface sphérique se transforme en un plan, et le triangle sphérique en un triangle rectiligne qui a les mêmes côtés α, $\mathcal{C}$, γ; nommant A' l'angle de ce triangle rectiligne, opposé au côté α, on a par la géométrie élémentaire

$$\cos A' = \frac{\mathcal{C}^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\mathcal{C}\gamma},$$

et de là

$$\sin A'^2 = \frac{2\alpha^2\mathcal{C}^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\mathcal{C}^2\gamma^2 - \alpha^4 - \mathcal{C}^4 - \gamma^4}{4\mathcal{C}^2\gamma^2};$$

donc $$\cos A = \cos A' - \frac{\mathcal{C}\gamma \sin A'^2}{2.3\,r^2} :$$

or $\frac{\mathcal{C}\gamma \sin A'}{2}$ est l'aire du triangle rectiligne, la nommant θ, on aura

$$\cos A = \cos A' - \frac{\theta \sin A'}{3r^2},$$

$$\cos\left(A' + \frac{\theta}{3r^2}\right) = \cos A' \cos\frac{\theta}{3r^2} - \sin A' \sin\frac{\theta}{3r^2};$$

en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{r^4}$, on a.....

$$\cos\frac{\theta}{3r^2} = 1, \quad \sin\frac{\theta}{3r^2} = \frac{\theta}{3r^2}.$$

donc $$\cos\left(A' + \frac{\theta}{3r^2}\right) = \cos A' - \frac{\theta \sin A'}{3r^2} = \cos A;$$

d'où il suit qu'on a $A = A' + \frac{\theta}{3r^2}$; on a par la même raison $B = B' + \frac{\theta}{3r^2}$, $C = C' + \frac{\theta}{3r^2}$, puisque la quantité θ est une fonction symétrique des trois côtés α, $\mathcal{C}$, γ.

Ajoutant ces trois dernières équations, elles donnent.....

$A + B + C = A' + B' + C' + \frac{\theta}{r^2}$; mais $A + B + C =$ deux droits $= 2D$; donc $\theta = r^2(A + B + C - 2D)$; or le second membre de cette équation est l'expression de la surface du triangle

sphérique (parag. I), donc en négligeant les quantités de l'ordre $\frac{1}{r^4}$, l'aire du triangle rectiligne est égale à celle du triangle sphérique; et l'une peut être prise par l'autre, sans qu'on ait à craindre une erreur sensible, lorsque r est très-grand par rapport aux côtés du triangle.

Théorême de M. Legendre.

(*Voyez* sa Géométrie, 6°. édition, pag. 416.)

X. Etant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués pourront être pris pour les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique; *ou en d'autres termes*, le triangle sphérique très-peu courbe, dont les angles sont A, B, C, et les côtés opposés a, b, c, répond toujours à un triangle rectiligne équivalent en surface, et qui a les côtés de même longueur a, b, c, et dont les angles opposés sont

$$A - \frac{1}{3}\epsilon, \qquad B - \frac{1}{3}\epsilon, \qquad C - \frac{1}{3}\zeta,$$

ϵ étant l'excès de la somme des angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits.

Démonstration. Les angles du triangle rectiligne ayant été désignés par les lettres A', B', C', on a les équations

$$A' = A - \frac{\theta}{3r^2}, \qquad B' = B - \frac{\theta}{3r^2}, \qquad C' = C - \frac{\theta}{3r^2}.$$

Or $\frac{\theta}{r^2} = A + B + C - 2D$, etc.

Ce théorême a été donné par M. Legendre, en 1787.

De l'usage du Théorême de M. Legendre, pour la mesure du méridien terrestre.

Le plan d'un *méridien céleste*, pour un lieu donné de la terre, passe par la verticale de ce lieu et l'axe du monde; le *méridien terrestre* pour le même lieu, passe aussi par la verticale de ce

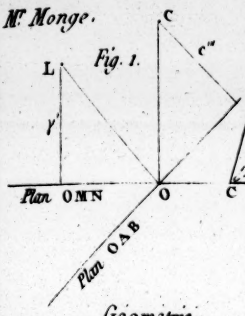
lieu ; mais les normales à la surface de la terre, menées par tous les points de cette ligne, doivent être parallèles au plan du méridien céleste : cette condition en détermine la forme et la position.

Le méridien mesuré, c'est-à-dire la ligne qu'on regarde comme le méridien terrestre d'un lieu quelconque, tel que Paris, touche ce méridien en ce même lieu ; la propriété caractéristique de cette ligne *est d'être la plus courte entre deux quelconques de ses points*; cette propriété est une conséquence des opérations géodésiques d'après lesquelles on la mesure. En effet, à partir du point du méridien d'un lieu déterminé, on trace un premier triangle sur l'horison de ce lieu; par le côté de ce triangle opposé au point de départ, on mène un second plan tangent à la surface de la terre, dans lequel on trace un second triangle qui sert à en construire un troisième en suivant le même procédé; or, le méridien *mesuré*, après avoir touché le véritable méridien du lieu du départ, s'infléchit de telle manière dans les plans de deux triangles consécutifs, qu'elle forme avec le côté commun à ces deux triangles, des angles égaux ; d'où il suit qu'en rapportant tous les triangles sur le plan du premier, ce qui s'exécute en faisant tourner l'un quelconque d'entre eux autour du côté qui lui est commun avec le précédent, le contour du méridien mesuré, se confond sur ce développement avec la droite tangente au méridien terrestre du lieu du départ ; donc il est la ligne la plus courte entre deux quelconques de ses points, par la même raison que la ligne la plus courte tracée sur une surface développable entre deux points quelconques, devient une ligne droite dans le développement de cette surface.

Pour calculer la longueur du méridien au moyen des triangles rectilignes tracés dans les plans tangens à la surface de la terre, il est clair que le contour de ce méridien doit être compris dans la zone terrestre qui a pour limite la chaîne des triangles ; mais ces triangles ne sont pas donnés directement : l'aire de chacun d'eux est égale à celle d'un triangle curviligne dont les angles ont été réduits à l'horison, et dont les côtés sont calculés comme des portions de grands cercles d'une sphère qui a pour rayon *le rayon de courbure* de la portion de surface terrestre que ce triangle occupe, portion qu'on suppose assez petite pour qu'on puisse négliger le changement de courbure dans ses différens points ; d'où l'on voit que la mesure géodésique d'un arc de méridien terrestre suppose qu'on sache convertir un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits en un triangle rectiligne ayant même surface et des côtés de même longueur, ce qui se fait, au moyen du théorême de M. Legendre, de la manière la plus simple et la plus élégante.

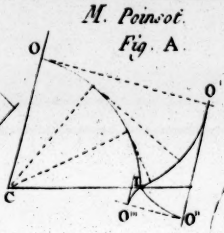
M. Monge.

Fig. 1.



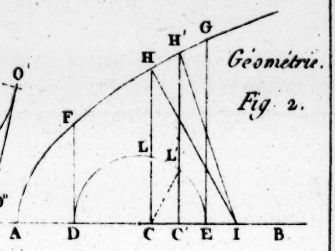
M. Poinsot.

Fig. A.



Géométrie.

Fig. 2.



Géométrie

Fig. 3.

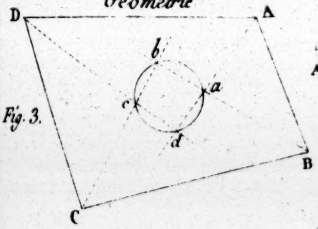


Fig. 4.

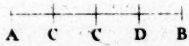
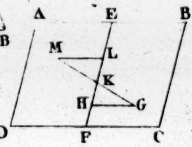
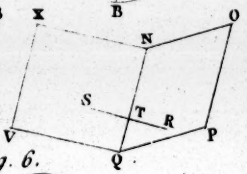


Fig. 5.





M. Berthot. Statique de Fig. 4 à Fig. 12.

Fig. 6.

Fig. 7.

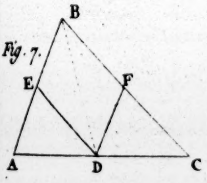


Fig. 8.

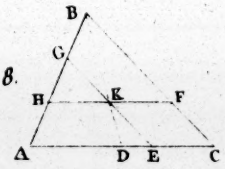


Fig. 9.

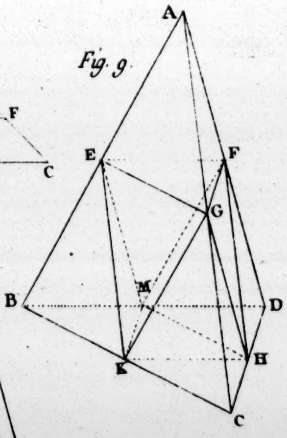


Fig. 11.

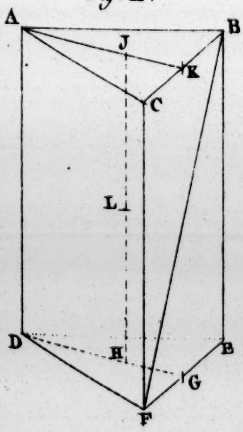


Fig. 10.

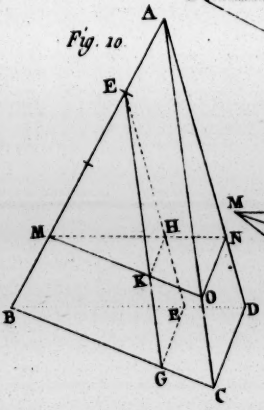
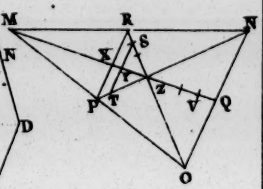


Fig. 12.



Girard fecit

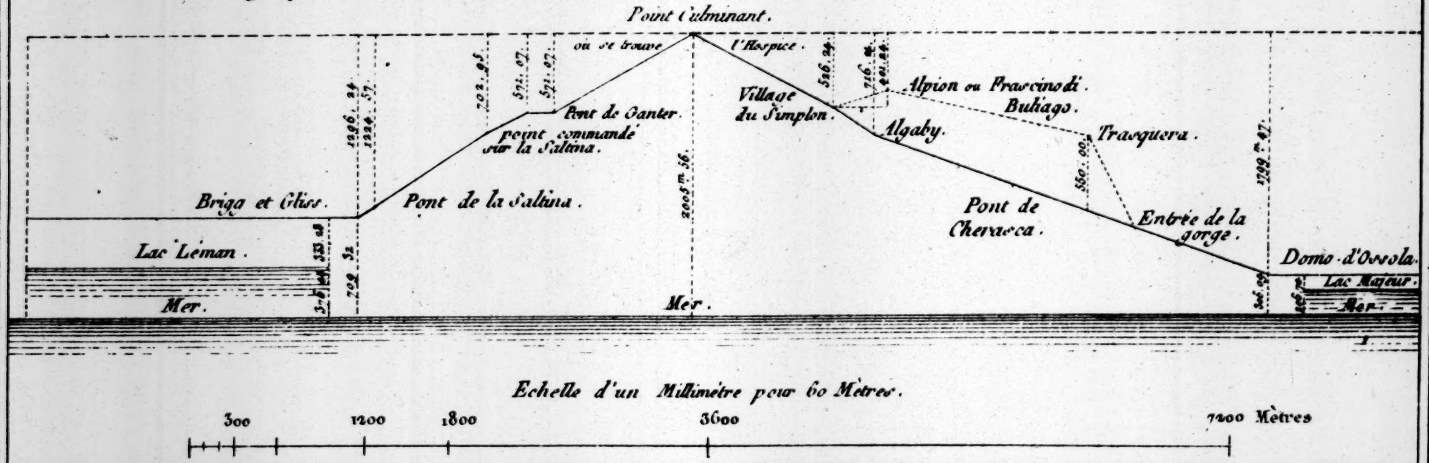
Jamaica, An 1803.

Nouvelle Route d'Italie par le Simplon.

Nivellement,

depuis Brigg par le Simplon jusqu'à Domo d'Ossola,
d'après les dessins de M. Cordier, Ingénieur.

Distance de Gliss à Algaby ..... 36000 mèt.
Distance d'Algaby à Domo-d'Ossola ..... 35000 .....
} ..... Longueur totale de la Route 71000 Mètres.



MÉCANIQUE.

Sur le mouvement d'un fluide pesant, incompressible et homogène, qui s'écoule d'un vase par un orifice horisontal, en admettant l'hypothèse du parallélisme des tranches horisontales.

Par M. Poisson.

Représentons par x la distance CP (fig. 4) d'une section quelconque NPM du vase à un point fixe C, et par y l'aire de cette section qui sera une fonction de x dépendante de la figure du vase. Il est évident que la pression que le fluide exerce sur la section $N'PM$ à un instant quelconque, et la vîtesse de la tranche fluide qui passe au même instant par la section NPM, sont deux fonctions de x et du tems t qui s'est écoulé depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'instant que l'on considère. Nous désignerons ces deux fonctions par p et v, et le problême consiste à en trouver les valeurs, ou du moins les équations d'où ces valeurs dépendent.

Pour le résoudre, concevons le fluide divisé en tranches horisontales infiniment minces; appelons y' et v' la base et la vîtesse de la première tranche; y'' et v'' la base et la vîtesse de la seconde, etc.; soient dx l'épaisseur commune de toutes ces tranches, g la pesanteur, et prenons la densité du fluide pour unité. Les forces motrices appliquées à ces différentes tranches seront $gy'dx$, $gy''dx$, etc., et celles qui auront réellement lieu seront $\frac{dv'}{dt}.y'dx$, $\frac{dv''}{dt}.y''dx$, etc.; donc, en vertu du principe de d'Alembert, le fluide doit rester en équilibre, si l'on applique à la première tranche la force $\left(g-\frac{dv'}{dt}\right).y'dx$; à la seconde, la force $\left(g-\frac{dv''}{dt}\right).y''dx$, etc. Cela posé, examinons comment, dans cet état d'équilibre, la pression se transmet d'une tranche à une autre.

La première tranche exerce directement sur la seconde une pression $\left(g-\frac{dv'}{dt}\right).y'dx$; cette pression se transmet à travers la seconde tranche sur la troisième, et d'après la propriété des fluides, pour avoir la pression transmise, il faut multiplier par le rapport $\frac{y''}{y'}$ des surfaces pressées; ainsi la première tranche

exerce sur la troisième une pression $\left(g - \frac{dv'}{dt}\right).y''dx$. La pression de la seconde tranche sur la troisième est $\left(g - \frac{dv''}{dt}\right).y''dx$; la pression totale que supporte la troisième tranche est donc $\left(2g - \frac{dv'}{dt} - \frac{dv''}{dt}\right).y''dx$. Cette pression se transmet sur la quatrième tranche à travers la troisième, et en la multipliant par le rapport $\frac{y'''}{y''}$ des surfaces pressées, elle devient....., $\left(2g - \frac{dv'}{dt} - \frac{dv''}{dt}\right).y'''dx$; en y ajoutant la pression directe de la troisième tranche sur la quatrième, savoir: $\left(g - \frac{dv'''}{dt}\right).y'''dx$, on a pour la pression totale que supporte la quatrième tranche, $\left(3g - \frac{dv'}{dt} - \frac{dv''}{dt} - \frac{dv'''}{dt}\right).y'''dx$. On trouveroit de même que la pression totale supportée par la cinquième tranche est $\left(4g - \frac{dv'}{dt} - \frac{dv''}{dt} - \frac{dv'''}{dt} - \frac{dv^{IV}}{dt}\right).y''dx$, et ainsi de suite.

Il est facile de voir maintenant que la pression p que le fluide exerce sur la section quelconque NPM, est égale à $gyx' - y\int \frac{dv}{dt}.dx$, x' désignant la distance de cette section à la surface AEB du fluide, et l'intégrale $\int \frac{dv}{dt}\,dx$ devant être prise depuis $x = CE$ jusqu'à $x = CP$. On doit ajouter à cette pression la quantité Ay, si l'on veut tenir compte de la pression de l'atmosphère, A désignant cette pression sur l'unité de surface, et l'on aura

$$p = Ay + gx'y - y\int \frac{dv}{dt}\,dx.$$

Le fluide étant supposé incompressible, les vîtesses des différentes tranches sont réciproques aux largeurs de ces tranches; on aura donc

$$v = \frac{ku}{y},$$

en appelant u la vîtesse du fluide à l'orifice ab du vase, et k l'aire de cet orifice.

Pour obtenir la force accélératrice $\frac{dv}{dt}$, il faut différentier la valeur de v, par rapport à t et à x; car cette force accélératrice est la différence des deux vîtesses consécutives d'une même tranche divisée par dt; or cette tranche ayant changé de place pendant l'instant dt, x doit être considérée comme fonction de t. Si l'on différentioit v seulement par rapport à t, on aurait la différence entre les vîtesses de deux tranches consécutives qui correspondent successivement à la section NPM. Différentiant donc la valeur de v par rapport à t et à u, et observant que u n'est fonction que de t, et y de x, on aura

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{\gamma} \cdot \frac{du}{dt} - \frac{uk}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

et par conséquent

$$\int \frac{dv}{dt}\, dx = k \frac{du}{dt} \cdot \int \frac{dx}{y} - uk \int \frac{dy}{y^2} \cdot \frac{dx}{dt},$$

à cause que u et $\frac{du}{dt}$ peuvent être mis hors du signe intégral qui est relatif à x. Mettant pour $\frac{dx}{dt}$ la valeur ci-dessus de v, il viendra

$$\int \frac{dy}{y^2} \cdot \frac{dx}{dt} = uk \cdot \int \frac{dy}{y^3} = -\frac{uk}{2y^2} + \frac{uk}{2c^2},$$

$$\int \frac{dv}{dt} \cdot dx = k \frac{du}{dt} \cdot \int \frac{du}{y} + \frac{u^2k^2}{2y^2} - \frac{u^2k^2}{2c^2};$$

c désignant l'aire de la surface AEB du fluide.

La valeur trouvée pour p devient donc

$$p = Ay + gx'y - yk \frac{du}{dt} \cdot \int \frac{dx}{\gamma} - \frac{u^2k^2}{2y} + \frac{u^2k^2}{2c^2} \cdot y \ldots (1);$$

et comme la pression à l'orifice ab doit être égale à Ak, on aura, toute réduction faite,

$$o = gh - k \frac{du}{dt} \cdot N - \frac{u^2}{2} + \frac{u^2k^2}{2c^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

En représentant par h la hauteur Ea du fluide, et par N l'intégrale $\int \frac{dx}{y}$ prise depuis $x = CE$ jusqu'à $x = Ca$, intégrale qui sera donnée en fonction de h, quand y sera donnée en fonction de x.

Quand le fluide du vase sera entretenu à la même hauteur, c'est-à-dire, quand le niveau AEB sera constant; h sera une constante donnée et par conséquent N et c seront aussi des quantités constantes. Dans ce cas il sera facile d'intégrer l'équation (2), ce qui donnera la valeur de u en fonction de t. Les équations (1) et $v = \frac{ku}{y}$, feront ensuite connoître les valeurs de la pression et de la vîtesse en un endroit quelconque du vase, et le problème sera complettement résolu. Si le vase n'est point entretenu à la même hauteur, le niveau AEB du fluide baissera; h sera une fonction inconnue de t, et c et N seront toujours des fonctions données de h. Il faudra donc alors une équation de plus que dans le cas précédent pour résoudre le problême. On la trouvera en observant que l'équation $v = \frac{ku}{y}$ devient à la surface AEB du fluide $\frac{dh}{dt} = \frac{ku}{c}$. Cette équation et l'équation (2) serviront à déterminer h et u; mais le plus souvent ces équations ne seront point intégrables par les moyens connus. Au reste, quand on aura les valeurs de h et de u, les équations $v = \frac{ku}{y}$ et (1) donneront celles de v et p, sans nouvelles difficultés.

Lorsque l'orifice ab est très-petit, de sorte qu'on puisse négliger les termes multipliés par k dans l'équation (2), elle se réduit à

$$o = 2gh - u^2.$$

D'où l'on conclut le théorême connu, que la *vîtesse du fluide à l'orifice est égale à la vîtesse due à la hauteur du niveau au-dessus de l'orifice*, c'est-à-dire, égale à $\sqrt{2gh}$. Mais il est bon d'observer que le fluide ne prend pas instantanément cette vîtesse finie; il y parvient dans un tems d'autant plus court que l'orifice ab est plus petit. Pour le faire voir, supposons le niveau constant et intégrons l'équation (2) dans cette hypothèse.

On tire de cette équation,

$$dt = \frac{2kN\,du}{2gh - u^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{kN}{\sqrt{2gh}}\left(\frac{du}{\sqrt{2gh} + u\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}} + \frac{du}{\sqrt{2gh} - u\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}}\right);$$

intégrant, on a

$$t = \frac{kN}{\sqrt{2gh}\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}} . \log . \frac{\sqrt{2gh} + \sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}}{\sqrt{2gh} - u\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}} + \text{const.}$$

la constante arbitraire est nulle, parce que le fluide partant du repos, on doit avoir à-la-fois $t = 0$, $u = 0$; on aura donc en passant des logarithmes aux nombres

$$\sqrt{2gh} - u\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$$

$$= \left(\sqrt{2gh} + u\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}\right) . e^{-\frac{t\sqrt{2gh}.\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}}{ku}}.$$

Or quand t est zéro, l'exposant $\frac{t\sqrt{2gh}.\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}}{ku}$ est aussi nul; mais k étant fort petit, cet exposant acquerra une valeur très-grande au bout d'un tems très-court; alors le second membre de l'équation précédente sera à très-peu-près égal à zéro, et l'on aura $u = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}}$ ou plus simplement $u = \sqrt{2gh}$, en négligeant la fraction $\frac{k^2}{c^2}$.

Supposons, par exemple (afin de montrer avec quelle rapidité

le second membre de l'équation précédente décroît), que le vase soit un cylindre vertical terminé par un fond quelconque dont la hauteur soit extrêmement petite relativement à celle du cylindre; de sorte qu'on ait à très-peu-près $\int \frac{dx}{y} = N = \frac{h}{c}$. L'exponentielle du second membre de l'équation précédente deviendra $e^{-\sqrt{\frac{2gt^2}{h}} \cdot \frac{c}{k} \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}}$, et au bout d'un tems égal à celui de la chûte de la hauteur h, cette quantité sera égale à $e^{-\frac{2c}{k} \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}}$; en sorte que si k est seulement le huitième de c, on trouvera, en faisant le calcul numérique, que cette quantité est au-dessous de 0,0000001. On voit donc clairement que la vîtesse du fluide à l'orifice n'atteint jamais rigoureusement sa valeur *maximum*, mais qu'elle en diffère d'une quantité insensible au bout d'un tems qui sera d'autant plus court, que l'orifice et la hauteur du fluide seront plus petits.

Note sur l'article précédent, relatif à l'écoulement des fluides par un orifice horisontal. Par M. HACHETTE.

La considération du tems qu'un fluide qui s'écoule par un orifice, met à acquerir le *maximum* de vîtesse due à la hauteur de la chûte, avoit été négligée par la plupart des géomètres qui s'étoient occupés d'hydrodynamique. C'est en observant le mouvement naissant d'un fluide, l'accroissement de vîtesse de ce fluide depuis l'état de repos jusqu'au *maximum* dû à la hauteur de la chûte, que le célèbre Montgolfier a conçu cette belle machine hydraulique, connue sous le nom de *bélier hydraulique*, que nous avons décrite dans cette Correspondance (pag. 32). L'objet du mécanisme est d'obtenir dans un tuyau horisontal une colonne d'eau qui soit alternativement en repos et en mouvement; deux soupapes remplissant cet objet; la colonne d'eau active perd, en fermant une soupape, son mouvement, parce qu'elle le communique à l'eau ascendante; après cette communication, la soupape cesse d'être fermée, et celle qui termine le tuyau de l'eau ascendante se ferme à son tour; la colonne d'eau horisontale reprend, en s'écoulant, son activité, mais en un tems fini qui permet le renouvellement du jeu des soupapes. D'après le calcul de M. Poisson, la colonne active acquiert une vîtesse, qui approche en un tems très-court de la vîtesse vers laquelle elle converge, et qu'à la rigueur elle n'atteint jamais.

GÉOMÉTRIE.

Sur la théorie des ombres et de la perspective; sur les points brillans des surfaces courbes.

Par MM. Monge et Hachette.

La théorie des ombres et de la perspective repose sur la connoissance d'un certain genre de surfaces qu'on a nommées *surfaces développables;* M. Monge a donné en 1775 un mémoire sur cette théorie; il a considéré le cas le plus général, celui où le corps lumineux et le corps opaque sont étendus dans les trois dimensions, et il a déterminé dans cette hypothèse l'ombre et la pénombre du corps opaque; les résultats auxquels il est arrivé sont purement analytiques et ne sont pas de nature à être appliqués directement aux arts du dessin; chargés d'enseigner à l'École Polytechnique l'application de la géométrie descriptive à la détermination des ombres et à la perspective linéaire, nous avons cherché à simplifier la méthode générale pour les cas particuliers qui se présentent le plus ordinairement; les surfaces les plus usitées dans les arts sont ou de révolution ou développables, ou n'étant pas développables, elles peuvent avoir la ligne droite pour génératrice; c'est principalement pour ces surfaces que nous avons cherché des constructions géométriques à l'aide desquelles on puisse trouver facilement leurs contours apparens et leurs lignes de séparation d'ombre et de lumière.

La théorie générale des ombres, telle que M. Monge l'a exposée dans le mémoire qui a été cité, admet que le corps lumineux occupe un certain espace, et qu'il est par conséquent terminé par une surface courbe donnée; dans les dessins à l'usage des artistes et des ingénieurs, on suppose le corps éclairant réduit à un point d'où tous les rayons lumineux partent comme d'un foyer; lorsque ce point est à une grande distance des corps éclairés, les rayons lumineux sont considérés comme parallèles entre eux; c'est ce qui a lieu par rapport au soleil qui éclaire la terre par des rayons sensiblement parallèles; cette hypothèse des rayons lumineux partant d'un point ou parallèles entre eux, ramène la théorie des ombres à celle de la perspective et se réduit à trouver la courbe de contact d'une surface conique dont le sommet est donné, avec une surface courbe donnée; c'est la solution de ce problème pour plusieurs cas particuliers que nous allons exposer.

De la perspective linéaire des solides.

Quelle que soit la position d'un corps opaque par rapport à l'œil d'un spectateur, toutes ses parties ne sont pas vues en même tems; les lignes qui séparent sur le corps sa partie visible de celle qui ne l'est pas, forment un contour que l'on nomme *contour apparent.*

La perspective d'un corps est une figure composée de la perspective des faces du corps que l'œil d'un spectateur supposé immobile peut appercevoir : elle a pour limite la perspective du contour apparent; or, pour mettre une quelconque des faces du corps en perspective, il faut construire la perspective des lignes d'intersection de cette face avec les faces qui lui sont adjacentes, donc la perspective d'un corps ou solide quelconque, est une figure composée : 1°. de la perspective des arêtes qui terminent les faces visibles du solide; 2°. de la perspective du contour apparent de ce solide.

Le solide *original* (1) étant connu, les arêtes de ses faces visibles le sont aussi, mais le contour apparent n'est pas donné directement, il dépend de la position de l'œil par rapport aux surfaces qui terminent le solide; si on conçoit la surface conique qui a son sommet dans l'œil du spectateur et qui enveloppe le solide en le touchant, la courbe de contact des différentes faces du solide avec la surface conique, est le contour apparent.

De la construction du contour apparent sur une surface courbe quelconque.

La position de l'œil du spectateur par rapport à la surface, étant connue, on fait passer par ce point une suite de plans qui coupent la surface suivant certaines lignes; on mène par l'œil des tangentes à chacune de ces lignes, et on détermine les points de tangence; la courbe, lieu géométrique de ces points, est le contour apparent de la surface courbe donnée.

Il est facile de voir que sur une sphère, le contour apparent est un petit cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint le centre de la sphère et l'œil du spectateur; sur un cône et sur un cylindre, il est formé d'autant de lignes droites qu'on peut mener par l'œil de plans tangens à l'une ou l'autre de ces surfaces, et en général le contour apparent d'une surface

(1) Je désigne par ce mot le solide qu'il s'agit de mettre en perspective; il est employé dans la plupart des traités de perspective.

développable se compose d'un système de lignes droites dont le nombre et la position dépendent de la nature de la surface.

Du contour apparent sur une surface courbe quelconque considérée comme enveloppe de l'espace que parcourt une surface mobile.

Lorsqu'on fait mouvoir une surface constante ou variable de forme, l'espace qu'elle parcourt est circonscrit par une autre surface, qu'en général on appelle *surface enveloppe*, parce qu'en effet elle enveloppe la surface mobile dans toutes ses positions; considérant la surface mobile dans une position quelconque, si elle prend une position qui en diffère infiniment peu, on aura une nouvelle surface très-peu différente de la première par la forme et la position, et qui coupera celle-ci dans une certaine courbe; cette courbe sera la ligne de contact de deux enveloppées consécutives entre elles et avec leur enveloppe; à une autre position de la surface mobile, correspond une autre ligne de contact, la surface *enveloppe* est le lieu de toutes ces lignes.

Une surface est définie, lorsque pour chacun de ses points on donne la ligne génératrice qui y correspond, et son contour apparent peut se construire d'après ces données, mais il est avantageux de considérer cette surface comme une enveloppe, lorsque le contour apparent de la surface mobile, qui est la génératrice de l'enveloppe, est une ligne facile à construire. Soit, par exemple, une surface engendrée par un cercle mobile de rayon constant, dont le centre décrit une courbe quelconque, et dont le plan est constamment perpendiculaire à cette courbe; en la considérant comme l'enveloppe de l'espace parcouru par une sphère qui a pour grand cercle le cercle mobile, les contours apparens sur les sphères enveloppées, sont des petits cercles de ces sphères, la ligne de contact de chaque sphère avec l'enveloppe est un grand cercle perpendiculaire à la courbe que son centre parcourt, l'intersection de ce grand cercle avec le petit cercle du contour apparent détermine deux points du contour apparent de l'enveloppe; il en seroit de même pour deux autres points qu'on trouveroit encore par l'intersection de deux cercles; et d'après la méthode générale, la recherche d'un point quelconque de ce contour exigeroit la construction d'une courbe plane, et d'une tangente à cette courbe par un point donné dans son plan.

Les surfaces de révolution sont dans le même cas que la surface *enveloppe* ou *canal*, dont il vient d'être question; on peut les considérer comme l'enveloppe de l'espace que parcourt une sphère, un cône ou un cylindre; et sur chacune de ces surfaces, le contour apparent est une ligne droite ou un cercle.

Une surface de révolution est l'enveloppe de l'espace que parcourt une sphère de rayon variable; en effet, si l'on conçoit la courbe génératrice de la surface dans l'un des méridiens, et les normales à cette courbe comprises entre la courbe et l'axe de révolution, la sphère qui a pour centre le point ou une normale quelconque coupe l'axe, et pour rayon la partie de cette normale comprise entre ce point et la courbe, elle sera successivement touchée par la surface de révolution suivant le cercle de cette surface qui correspond à l'extrémité de la normale, donc si l'on fait mouvoir une sphère de telle manière que son centre parcourt l'axe de révolution, et que son rayon varie comme la partie de la normale à la courbe génératrice comprise entre cette courbe et l'axe, la sphère mobile engendre par ses intersections successives la surface de révolution.

La surface de révolution peut aussi être considérée comme l'enveloppe que parcourt un cône droit dont le sommet se meut sur l'axe de révolution, et dont le côté s'applique successivement sur les tangentes à la courbe génératrice située dans un plan méridien; un cylindre mobile et constant de forme peut aussi par ses intersections successives engendrer une surface de révolution donnée; en effet, si l'on conçoit la courbe génératrice dans un plan méridien quelconque, le cylindre qui a pour base cette courbe et pour droite génératrice une perpendiculaire au plan du méridien, touchera évidemment la surface de révolution suivant la courbe méridienne. Passant d'une courbe méridienne à une autre infiniment voisine, on aura un nouveau cylindre de même forme et tangent à la surface de révolution, donc cette surface est l'enveloppe de l'espace que parcourt ce cylindre qui a successivement pour base la courbe méridienne et pour arêtes des droites perpendiculaires au plan de cette courbe.

De ces trois manières de considérer la surface de révolution comme enveloppe, on en déduit trois solutions différentes de ce problème; « trouver la courbe de contact d'une surface de révolution avec une surface conique qui a son sommet en un point donné. » Les deux premières méthodes supposent qu'on sache mener des tangentes à la courbe génératrice par des points pris sur cette courbe; la troisième méthode est moins simple, en ce qu'elle oblige à mener des tangentes aux courbes méridiennes par des points pris hors ces courbes.

Nous avons appliqué ces méthodes à la solution de ce problème de géométrie : « par une droite donnée hors d'une surface de révolution, mener un plan tangent à cette surface? » Ayant pris sur la droite deux points quelconques, on les considère comme les sommets de deux cônes qui enveloppent la surface donnée, on

détermine les cercles de contact de ces cônes, et leurs intersections sont les points de contact de la surface de révolution avec le plan demandé; l'un de ces cônes peut devenir un cylindre dont les arêtes sont parallèles à la droite donnée; la courbe de contact de ce cylindre se construit comme celle d'un des cônes qui a son sommet sur la droite donnée.

La perspective d'un piedouche a été construite d'après les mêmes méthodes pour l'usage de l'Ecole Polytechnique; la courbe du contour apparent a un point de rebroussement; la raison physique de cet accident est que l'une des tangentes du contour apparent passe par l'œil du spectateur, ce qui n'a pas lieu dans le contour apparent de la sphère, par exemple, car ce contour étant sur le plan d'un petit cercle, il faudroit que l'œil fut dans ce plan pour être rencontré par l'une des tangentes du petit cercle, ce qui est impossible.

Les opérations graphiques qui déterminent les projections de la courbe de contact de la surface de révolution avec un cône qui lui est circonscrit, sont faciles à comprendre; ayant coupé la surface de révolution par un plan quelconque perpendiculaire à son axe, on détermine le cône droit tangent ou la sphère normale suivant le cercle contenu dans le plan; le sommet du cône donné hors la surface étant considéré comme l'œil d'un spectateur, on cherche le contour apparent sur le cône droit et sur la sphère; le premier est le système de deux droites, le second est un petit cercle de la sphère, l'intersection de ce contour apparent avec le cercle de la surface de révolution, donne des points de la courbe de contact de cette surface avec le cône qui lui est circonscrit.

Pour faire usage de la troisième méthode, il faut projetter le sommet du cône circonscrit à la surface de révolution sur chacun des plans méridiens et même par ces projections des tangentes aux courbes méridiennes, les points de contact appartiennent à la courbe cherchée.

En construisant les contours apparens sur les surfaces de révolution, il faut éviter les lignes qui se coupent trop obliquement; c'est d'après cette considération qu'on se détermine dans le choix de la méthode qu'il convient d'employer pour résoudre le problême proposé; celle qui conduit aux résultats graphiques les plus exacts, doit être préférée.

La plupart des auteurs de perspective ont dû s'occuper des surfaces de révolution; car c'est principalement pour mettre en perspective l'architecture, qu'on étudie leurs ouvrages; or, les différentes parties d'un ordre sont ou planes, ou cylindriques,

ou déterminées par des surfaces de révolution, il fallait donc indiquer un moyen de mettre ces dernières surfaces en perspective par une méthode pratique de facile exécution ; ils ont imaginé les surfaces de révolution coupées suivant des cercles par des plans perpendiculaires à leurs axes ; ils ont mis chacun de ces cercles en perspective ; enfin ils ont tracé une ligne tangente aux perspectives de ces cercles.

La solution considérée en géométrie est rigoureuse, mais on conçoit qu'il est bien difficile de tracer une courbe par la seule condition d'être tangente à d'autres courbes données, et combien les méthodes précédentes sont préférables, puisqu'elles donnent les points mêmes du contour apparent ; il est vrai qu'il y a des méthodes pratiques très-bonnes et très-courtes de mettre des cercles en perspective ; en ne construisant d'ailleurs que les portions de perspectives des cercles, qui doivent être touchées par le contour apparent, on a bientôt trouvé ce contour avec une exactitude suffisante. Il n'y a donc pas d'inconvénient de suivre pour ce cas les préceptes ordinaires des auteurs de perspective, sur-tout si l'on a conservé le souvenir d'un contour apparent déterminé géométriquement et par points, comme il vient d'être dit.

Les méthodes qu'on vient d'indiquer pour construire les contours apparens des surfaces de révolution, s'appliquent encore à d'autres familles de surfaces *enveloppes ;* qu'une surface constante de forme se meuve sans tourner, c'est-à-dire, de manière que chacun de ses points décrive la même ligne courbe, l'enveloppe de l'espace qu'elle parcourt est touchée par des cylindres qui ont pour base les intersections de deux enveloppées successives, et pour arêtes des droites parallèles aux tangentes de la courbe décrite par un point quelconque de la surface mobile.

Si la surface mobile se meut sans tourner, et qu'elle change de forme, il peut arriver que la surface, lieu de ses intersections successives, soit l'enveloppe de l'espace que parcourroit un cône ; ce cas a lieu lorsque deux intersections successives sont des courbes semblables, car elles sont alors situées sur une même surface conique nécessairement tangente à l'enveloppe.

Quelle que soit la génération d'une surface donnée, si l'on conçoit une surface développable qui lui soit circonscrite et qui la touche suivant une génératrice, le contour apparent sur la surface développable étant formé d'une ou plusieurs lignes droites, les points communs à ces droites et à la génératrice, sont évidemment des points du contour apparent de la surface donnée ; ces considérations ne sont applicables à la pratique du dessin, que lorsque les courbes de contact de la surface proposée et des sur-

faces développables qui lui sont circonscrites, sont faciles à tracer; et lorsque d'ailleurs les surfaces développables sont de nature à ce qu'on puisse leur mener commodément des plans tangens par des points pris hors d'elles, et ces deux circonstances sont rarement réunies.

Du contour apparent sur les surfaces qui ont pour génératrice la ligne droite, et qui ne sont pas développables.

On sait qu'étant données trois lignes courbes quelconques, une droite peut se mouvoir en s'appuyant constamment sur ces trois courbes, et qu'il en résulte la surface la plus générale qui a pour génératrice la ligne droite; cette surface jouit de cette propriété par rapport à son plan tangent, que tous les plans menés par sa génératrice considérée dans une position quelconque, lui sont tangens, et pour chaque plan, il y a sur la génératrice un point de contact différent; en tout autre point de cette génératrice, le plan est sécant; à chaque position de la génératrice correspond une surface particulière qui touche la surface générale suivant cette génératrice; cette surface tangente jouit de cette propriété qui la distingue de toute autre, qu'elle peut être engendrée de deux manières différentes par une droite mobile; nommant la surface générale *surface gauche*; on appelle la surface qu'on vient de définir, *plan gauche*.

Une génératrice quelconque de la surface gauche coupe ses trois lignes courbes directrices de son mouvement en trois points; les tangentes à ces courbes menées par ces trois points, sont les directrices de la génératrice du plan gauche tangent.

La propriété de la surface gauche générale par rapport à son plan tangent, « que tous les plans menés par sa génératrice considérés dans une position quelconque, lui sont tangens, » se démontre en observant qu'un plan quelconque mené par la génératrice, coupe encore la surface suivant une ou plusieurs lignes courbes qui sont nécessairement rencontrées par la droite; or le plan touche évidemment la surface en ces points, puisqu'il passe par une ligne droite génératrice, qui est sa propre tangente et de plus par la tangente à une courbe tracée sur la surface; donc tous les plans menés par la génératrice sont tangens; d'ailleurs en admettant la double génération du plan gauche tangent, il est évident que tout plan mené par une droite de ce plan gauche, le coupera encore suivant une autre droite, et par conséquent le touchera au point de rencontre de ces deux droites; il sera donc aussi tangent à la surface gauche générale.

Cela posé, il s'agit de trouver le contour apparent sur une

surface gauche donnée; ce problême revient à celui-ci: « mener par un point donné qui est l'œil du spectateur, une suite de plans tangens à une surface gauche, et déterminer pour chaque plan tangent le point de contact »; car il est évident que le lieu de tous ces points de contact est le contour apparent; or, pour résoudre ce dernier problême, on menera un plan par le point donné et la génératrice de la surface gauche considérée dans une position quelconque. D'après ce qui a été dit précédemment, il sera tangent à cette surface; donc si on détermine le point de contact, ce point appartiendra au contour apparent: on répétera la même opération pour chaque génératrice, et on aura le contour apparent. Lorsqu'on connoîtra le plan gauche tangent, chaque point du contour apparent sera l'intersection de deux droites de ce plan gauche; autrement il sera déterminé par la rencontre d'une ligne droite avec une ligne courbe.

Tout ce qu'on vient de dire sur le contour apparent, s'applique également à la courbe de séparation d'ombre et de lumière, dans l'hypothèse des rayons lumineux parallèles entre eux, ou partant d'un point donné.

Des points brillans sur les surfaces courbes.

Dans l'hypothèse des rayons lumineux partant d'un point unique ou parallèles entre eux, on appelle *point brillant* d'une surface courbe celui qui réfléchit un rayon lumineux vers l'œil du spectateur. Si la surface étoit parfaitement polie, ce point seroit le seul visible; et comme la portion visible de la surface a pour limite le contour apparent, on doit regarder le corps le plus poli comme hérissé d'aspérités insensibles à la vue simple, mais réellement terminées par de petites surfaces qui ont elles-mêmes leurs points brillans. De toutes ces aspérités dont les dimensions sont très-petites, il en est une plus apparente, c'est celle qui correspond au point brillant de la surface; pour déterminer ce point, il faut concevoir un ellipsoïde de révolution qui a pour foyers le point lumineux et l'œil du spectateur, et qui touche la surface proposée; il est évident qu'il la touche au *point brillant*, car les droites menées du point au foyer des rayons lumineux et à l'œil du spectateur étant des rayons vecteurs de l'ellipsoïde, elles feront, avec la surface touchée par cet ellipsoïde, des angles égaux; d'où il suit que le rayon de lumière qui se dirige suivant la première droite, se réfléchira dans l'œil du spectateur. La position du point brillant sur une

surface courbe varie en même tems que la position de l'œil ; ce point est très-remarquable sur les yeux de la personne dont on fait le portrait ; et nous sommes tellement habitués à juger de la position de ces points brillans, que la plus petite erreur du peintre dans cette partie de son tableau seroit apperçue par l'œil le moins exercé.

Du point brillant *sur une droite située dans le plan du point lumineux et de l'œil du spectateur.*

Il est évident qu'en joignant ce point lumineux et l'œil du spectateur par une droite, la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite rencontrera la droite donnée en un point qui sera son point brillant.

Si, au lieu d'une droite, on donne dans le même plan une ligne courbe, à laquelle on sache mener des tangentes ou des normales, on déterminera aussi facilement son point brillant, car chaque normale a son point brillant ; la ligne qui est le lieu de tous ces points, coupera la courbe donnée au point demandé.

Du point brillant *sur une surface courbe quelconque.*

Si de tous les points de la droite qui joint le point lumineux et le point de vue, on abaisse des normales sur la surface donnée, la courbe formée par les pieds de ces normales sur la surface contiendra le point brillant ; mais chaque normale a son point brillant : la suite des points brillans des normales contient encore le point demandé, donc ce point est à l'intersection de deux courbes connues ; autrement il est le point commun à trois surfaces, savoir : la surface donnée, la surface normale à celle-ci menée par la ligne droite qui joint le point lumineux et l'œil du spectateur, et enfin l'une des deux surfaces coniques qui ont pour sommet le point lumineux et l'œil du spectateur, et qui sont formées par les rayons incidens et réfléchis, correspondans aux points brillans des normales.

De la recherche du point brillant par plusieurs cas particuliers.

La méthode générale qu'on vient d'exposer pour déterminer le point brillant sur une surface courbe quelconque, n'est pas celle qu'il faut suivre dans un grand nombre de cas qui se présentent. Supposons, par exemple, la surface donnée telle qu'elle ait pour surface normale le long d'une ligne connue ; un plan ; chaque plan coupera la ligne droite qui joint l'œil du spectateur et le point lumineux ; si de ce point on abaisse une normale sur la courbe contenue dans le plan, elle sera aussi normale à la surface, et on sera dispensé d'abaisser une normale à la surface

proposée par un point donné hors cette surface, problème qu'il est indispensable de résoudre, lorsqu'on suit la méthode générale.

Les surfaces développables et les surfaces de révolution sont dans ce cas particulier, car elles ont des plans pour les surfaces qui leur sont normales, suivant des droites pour les premières, et suivant des courbes méridiennes pour les secondes.

Les surfaces normales à la surface proposée, au lieu d'être planes, peuvent être coniques ou cylindriques; si elles sont coniques, on mène un plan par le sommet de chaque cône et par la droite qui joint le point lumineux et l'œil du spectateur, chacun de ces plans contient cette droite et une normale à la surface proposée; la méthode générale devient donc encore plus simple que dans le cas précédent; car on est même dispensé d'abaisser une normale à une courbe de la surface donnée par un point donné hors cette courbe.

Les surfaces de révolution sont évidemment dans ce cas; elles ont pour surfaces normales suivant des cercles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe de révolution, des cônes droits; il est donc avantageux d'employer ces cônes pour construire le point brillant sur une surface de révolution.

Nous avons démontré que la surface gauche générale avoit pour surfaces normales suivant les droites correspondant aux différentes positions de la génératrice, des plans gauches que nous avons nommés, dans la théorie des surfaces du second degré, *paraboloïdes hyperboliques*; chacun de ces plans gauches prolongés rencontreroit la droite qui joint le point lumineux et l'œil du spectateur en un point qu'on peut construire avec la ligne droite et le cercle; d'où il suit que le point brillant sur la surface gauche la plus générale peut aussi se construire avec ces mêmes lignes.

Les dessins géométraux peuvent être considérés comme des perspectives pour un œil placé à une distance infinie du plan géométral; pour cette position de l'œil, 1°. tous les rayons réfléchis de la surface des corps sont parallèles entre eux, et parallèles aux lignes de projections sur le géométral; 2°. la droite qui joint l'œil du spectateur et le point lumineux devient une droite menée par ce point parallèlement aux lignes de projection; mais si les rayons lumineux sont eux-mêmes parallèles entre eux, les rayons réfléchis l'étant aussi, la direction de la normale pour le point brillant d'une surface courbe proposée sera déterminée; et pour la construire, il faudra, par un point quelconque, mener deux parallèles, l'une aux rayons lumineux, l'autre aux rayons réfléchis

chis, la droite qui divisera en deux parties égales l'angle formé par les deux parallèles, sera la directrice de la normale correspondant au point brillant. La connoissance de ce point dépend donc alors de la solution de ce problème :

Etant donnée une surface courbe, lui mener une normale parallèle à une droite donnée ?

Ou de celui-ci :

Etant donnée une surface courbe, lui mener un plan tangent perpendiculaire à une droite donnée ?

Ce dernier problème se résout, comme on l'a dit pag. 298, en enveloppant la surface proposée de deux surfaces cylindriques dont les arêtes sont parallèles à deux droites tracées dans le plan donné; les deux courbes de contact se rencontrent en un point, qui est le point brillant.

Si la surface proposée est de révolution, on mènera d'abord un plan méridien parallèle à la droite donnée, qui contiendra une courbe méridienne; la normale à cette courbe, encore parallèle à la droite donnée, coupera la surface de révolution au point demandé.

Tout ce qu'on a dit du point brillant dans l'hypothèse des rayons lumineux partant d'un point, s'applique également à celle des rayons lumineux parallèles; dans la première hypothèse, on conçoit une droite menée par le point lumineux et l'œil du spectateur; dans la seconde, cette droite est remplacée par une parallèle aux rayons lumineux menée par l'œil du spectateur.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

Résolu graphiquement, en ne faisant usage que de la règle.

Deux droites et un point étant donnés, mener par le point une troisième droite qui concourre au même point que les deux droites données ?

M. Poinsot a proposé cette question dans le numéro précédent de la Correspondance. J'en ai reçu plusieurs solutions, parmi lesquelles on remarque celles de M. Roche (1), élève de l'Ecole

(1) M. Roche a aussi résolu par corollaire ce problème: *mener une tangente à une section conique quelconque par un point pris sur ou hors la courbe*, en ne faisant usage que de la règle.

Polytechnique, *première division*, de MM. Duleau et Delon, aspirans à la même Ecole, élèves de M. Dinet.

Les fig. 5 et 6 indiquent, à quelques différences près, la solution de M. Poinsot. Des considérations de géométrie appliquée à la perspective, m'ayant donné les mêmes constructions, qui sont d'ailleurs les plus simples de celles qu'on a trouvées, je les ai prises pour base de la solution que je vais donner. Ceux qui ne sont pas encore habitués à ce genre de considérations, trouveront, dans ce numéro, un article de *perspective linéaire*, qui servira d'éclaircissement.

Solution. Le point donné est placé dans l'angle formé par les deux droites aussi données, ou il est en dehors.

Premier cas. Les deux droites données peuvent être considérées comme la perspective de deux droites parallèles situées dans un plan horisontal, le plan du tableau étant vertical; de plus, on peut admettre dans la même hypothèse que le point donné est la perspective d'un point de la droite menée parallèlement et à égales distances des deux droites données. Soient AB et CD (fig. 5) les deux droites et le point donnés; menant par ce point E deux droites quelconques gEh, fEk; elles seront les perspectives des deux diagonales d'un parallélogramme compris entre les deux droites dont AB et CD sont les perspectives; le point de concours des côtés de ce parallélogramme sur le tableau sera en l; donc si par le point l on mène la droite lmn, elle sera la perspective d'une parallèle aux côtés du parallélogramme; donc gn et mk seront les perspectives des diagonales d'un second parallélogramme dont les côtés sont parallèles au premier, mais les centres de ces deux parallélogrammes sont placés sur une droite parallèle à celle dont AB ou CD est la perspective; donc la droite EF qui en est la perspective, et qu'on trouve en ne faisant usage que de la règle, sera la droite demandée.

Second cas. Le point est supposé donné hors de l'angle des deux droites.

Soient (fig. 6) AB et CD les deux droites données, E le point donné hors l'angle; les deux droites données peuvent encore être considérées comme les perspectives de deux droites parallèles situées dans un plan horisontal, le plan du tableau étant vertical; de plus on peut admettre dans la même hypothèse que le point donné E est le point de concours des côtés d'un parallélogramme P compris entre les deux droites dont AB et CD sont les perspectives; ayant mené par le point E deux droites quelconques Eh, Ek, le quadrilatère $fghk$ sera la perspective d'un parallélogramme P, dont le centre a pour perspective le point l,

intersection des droites fk, gh; menant la droite Enm, les deux quadrilatères $fnmh$ et $gnmk$ sont les perspectives de deux parallélogrammes égaux p et p', dont chacun est moitié du parallélogramme P. Ces deux parallélogrammes étant égaux et compris entre les mêmes droites, ont des diagonales parallèles; or ces diagonales ont pour perspective les droites nh, mg, ou mf, nk, qui se rencontrent les premières en o, et les secondes en o'; et d'ailleurs tous les points de concours sont placés sur une même droite du tableau; donc les points o', E, o, et le point de concours des droites AB, CD, sont sur une même droite $o'Eo$; or celle-ci se construit avec la règle; donc elle est la droite demandée.

Si par le point E, on mène une droite quelconque $Eg'k'$, les deux diagonales gk', $g'k$ se coupent en un point l'; et il est évident que tous les points l, l'.... sont en une ligne droite qui concourt au même point que les droites AB, CD, car alors ils sont les perspectives des centres des parallélogrammes qui ont pour perspectives les quadrilatères $fghk$, $gg'kk'$, etc. Cette proposition de géométrie est démontrée page 81 d'un mémoire de M. Carnot, contenant un essai sur la théorie des transversales, 1 vol. *in-4°*. 1806.

Article de M. Hachette.

Lettre de M. Brianchon, officier d'artillerie, ancien élève de l'Ecole Impériale Polytechnique.

Metz, le 3 janvier 1807.

Monsieur,

Je vous écris quelques mots à la hâte en vous envoyant, par occasion, un petit travail que j'ai fait pour votre Correspondance; il est analogue au mémoire que vous avez bien voulu faire insérer dans le journal de l'Ecole (13°. cahier): ce sont quelques propriétés assez saillantes des courbes du second degré, démontrées à l'aide de quelques mots de la géométrie la plus simple, etc.

Des courbes du second degré.

On sait que si dans une courbe du second ordre on inscrit un hexagone quelconque $ABCDEF$ (fig. 7), les trois points de concours H, I, K des côtés opposés, sont toujours situés sur une même droite: or cette proposition conduit immédiatement à celle-ci:

(I) « Si trois droites indéfinies FH, HK, KF sont assujetties « à passer respectivement par les points fixes E, I, A; que de « plus, les deux premières se croisent toujours sur une droite « donnée HB, et les deux dernières sur une autre droite KD

« aussi donnée, le point d'intersection F de la première et de « la troisième décrira une section conique. »

Car il est facile d'appercevoir avec un peu d'attention que la courbe ainsi parcourue par ce point F, passera nécessairement par les cinq points connus A, B, C, D, E.

Ce théorème élégant, qu'il seroit pénible de démontrer par le calcul, est dû, je crois, à *Mac-Laurin*; il n'est, comme on voit, qu'une conséquence de la belle propriété dont jouissent les hexagones inscrits aux courbes du second degré, laquelle se démontre sur-le-champ en établissant quelques proportions. C'est d'ailleurs une règle assez générale, que les propositions de ce genre qui tiennent à la *théorie des transversales*, se découvrent à l'aide des plus simples considérations de la géométrie élémentaire, lorsque la longueur des calculs permet à peine à l'analyse d'y atteindre.

(II) La ligne du second ordre décrite par le point F (fig. 7), se réduiroit à une du premier, si trois des cinq points A, B, C, D, E, se trouvoient en ligne droite, ce qui arrivera dans deux cas :

1°. Lorsque les deux directrices HB, KD, se rencontreront sur la ligne AE, qui joint les deux points fixes ou *pôles* A et E.

2°. Lorsque les trois pôles A, E, I (fig. 8), seront disposés en ligne droite; dans ce cas, la droite parcourue par le point F passe évidemment par le point de contour C des deux directrices.

On peut exprimer ainsi cette dernière propriété :

« Si dans le plan d'un angle quelconque KCH, on prend « arbitrairement trois points A, E, I, situés sur une même « droite; que de l'un d'eux, I, on dirige tant de droites qu'on « voudra, comme IH, qui va couper le premier côté de l'angle « en H et le second en K, qu'ensuite on joïgne H et E, K « et A, par des droites qui se croisent en F, tous les points F, « ainsi déterminés, appartiendront à une même ligne droite passant « par le sommet C de l'angle. »

Ceci s'étend immédiatement aux trois dimensions, en considérant, dans la figure 8, KCH comme l'intersection d'un angle dihèdre par un plan perpendiculaire à son arête, et A, E, I, comme les projections faites sur ce plan de trois points de l'espace placés dans un plan parallèle à cette arête; le lieu des points F est alors un plan passant par l'arête de l'angle. On pourroit aller plus loin et faire voir que ces propositions se rattachent à une autre beaucoup plus générale, et qui convient à

toutes les surfaces courbes du second ordre dont l'angle dihèdre est un cas particulier ; mais comme la démonstration exigeroit l'emploi de l'analyse, elle ne seroit pas ici à sa place.

Le théorême du n°. I peut être généralisé de la manière suivante :

(III) « Si dans un polygone quelconque on prend sur chacun « des côtés ou sur leurs prolongemens un point fixe ou pôle « autour duquel ce côté puisse tourner librement, que de plus « on assujettisse tous les sommets, excepté le dernier, à glisser « sur des droites données ; lorsqu'on déformera le polygone, « en satisfaisant à ces conditions, les côtés et les angles chan- « geront de grandeur, et le dernier sommet parcourra une courbe « du second ordre. »

Ainsi, par exemple, dans le quadrilatère *HKLM* (fig. 9), dont les quatre pôles sont *E*, *I*, *O*, *U*, et dont les trois premiers sommets *H*, *K*, *L*, ont pour directrices respectives les droites *HC*, *KC*, *LP*, le quatrième, *M*, se meut sur une section conique, car si l'on effectue les constructions indiquées sur la figure, on voit (II, 2°., fig. 8) que le point *F* doit toujours se trouver sur une même droite déterminée *CF*, passant par le sommet *C* de l'angle *KCH*, que de même le point *G* doit être constamment placé sur une autre droite déterminée *BG* ; le point décrivant *M* peut donc être considéré comme le troisième sommet d'un triangle *FGM* dont les deux premiers, *F* et *G*, glisseroient respectivement sur les droites connues *CF*, *BG*, et dont les trois pôles seroient *A*, *E*, *O* ; donc en effet (th. I) ce point *M* décrit une courbe du second degré.

Cette branche de la géométrie, qui comprend les propriétés de certains systêmes de lignes droites, a été traitée d'une manière spéciale par l'un de nos grands géomètres modernes, qui, le premier, en a donné les véritables élémens, sous la dénomination de *Théorie des transversales ;* elle a depuis occupé quelques autres mathématiciens, principalement M. *Servois*, qui, dans un ouvrage qu'il vient de publier, l'applique à la solution d'un grand nombre de problêmes intéressans de géométrie-pratique ; il est sans doute curieux de retrouver dans plusieurs auteurs anciens, notamment dans *Pappus*, quelques traces de ce genre de recherches.

La théorie des transversales, comme l'a fait voir M. Carnot dans ses ouvrages, donne immédiatement les propriétés les plus générales des polygones coupés par des lignes droites, lesquelles, s'appliquant de suite à toutes les courbes algébriques, établissent sur ce point ce qu'on peut desirer de plus complet. Cette même théorie sert de la manière la plus heureuse dans les constructions

des problèmes d'ombres et de perspective linéaire; enfin elle conduit quelquefois très-simplement à des théorèmes de géométrie aux trois dimensions, auxquels il seroit impossible d'arriver par les considérations de la géométrie descriptive, et que même on obtiendroit difficilement par l'analyse, à cause de la complication du calcul.

Il me semble qu'on pourroit appeler cette partie de la géométrie, *Géométrie de la ligne droite*, car elle apprend à tirer tout le parti possible de la seule ligne droite qui peut servir à résoudre beaucoup plus de problèmes qu'on ne le pense communément. J'ai déja donné quelques exemples de cela dans un mémoire inséré dans le 13e. numéro du journal de l'Ecole Impériale Polytechnique. Ainsi qu'on se donne cinq points A, B, C, D, E, pour y faire passer une section conique, la fig. 7 indique une construction élégante et des plus simples pour en déterminer à volonté un sixième F; qu'ensuite par l'un quelconque E des points de la section conique on veuille lui mener une tangente, on prendra arbitrairement quatre autres points A, B, C, D de la courbe, et par les deux points de concours, de AB et DE, AE et CD, on mènera une droite qui, par sa rencontre avec BC, déterminera un second point de la tangente demandée.

Si, au lieu de cinq points, on se donnoit cinq tangentes (fig. 10), ou, ce qui est la même chose, si l'on demandoit d'inscrire une courbe du second degré dans le pentagone $ABCDE$, on trouveroit sur-le-champ tant d'autres tangentes qu'on voudroit, comme bc, en menant par les deux extrémités de l'un des côtés BC, deux droites qui se croisent sur la diagonale restante AD, et qui déterminent sur les côtés de l'angle E, opposé à BC, les deux points b et c de la tangente bc; quand le point c coïncidera avec le sommet E, b sera le point de contact du côté DE avec la courbe cherchée; ainsi, non-seulement on pourra construire un nombre indefini de tangentes à la section conique qu'on demande, mais encore on assignera sur chacune le point où elle touche la courbe, et cela n'exigera que le tracé de quelques lignes droites.

Je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet, sur lequel il y a beaucoup de choses à dire; et parmi les questions utiles ou curieuses dont les solutions peuvent s'obtenir en n'employant que la seule ligne droite, considérée simplement comme direction et non comme mesure, je me bornerai à indiquer la suivante, parce qu'elle peut se résoudre très-brièvement, et qu'elle présente quelque chose de piquant.

« Une ligne droite étant disposée d'une manière quelconque « dans le plan d'un parallélogramme, on propose de lui mener « une parallèle par un point donné sur le même plan. »

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE

DU THÉORÊME DE GÉOMÉTRIE DONNÉ PAR M. HACHETTE (1);

Par M. PUISSANT, *professeur de Mathématiques à l'Ecole militaire de Fontainebleau.*

Si deux plans rectangulaires sont assujettis à se mouvoir entre deux droites fixes, leur commune section engendrera un cône qui aura même sommet que l'angle des deux droites fixes, et dont la base sera un cercle perpendiculaire à l'une ou à l'autre de ces droites.

Soient AM, AM' (fig. 11) les deux droites fixes données ou les traces horisontales des deux plans rectangulaires passant par l'origine des coordonnées. Les équations de ces plans ont

$$Ax + By + Cz = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z = 0,$$

lesquelles ont lieu en même tems à la ligne d'intersection; et la condition de perpendicularité est exprimée par

$$AA' + BB' + CC' = 0;$$

de là on tire

$$(AA'+BB')z^2+BB'y^2+AA'x^2+(AB'+A'B)xy=0.... (1).$$

Telle est l'équation de la surface conique engendrée par la commune section des deux plans rectangulaires. Lorsque $z = 0$, on a seulement

$$(By + Ax)(B'y + A'x) = 0,$$

c'est-à-dire que le plan des xy coupe le cône suivant les deux droites AM, AM' dont les équations respectives sont

$$Ax + By = 0, \quad A'x + B'y = 0.$$

Tout plan parallèle à celui des xy coupe le cône suivant une ellipse, ce qui est évident; d'où il suit que le cône est oblique.

Pour déterminer la position de la base circulaire de ce cône, il faut substituer dans l'équation (1) les valeurs connues

$$x = a + x' \cos\varphi + y' \cos\theta \sin\varphi$$
$$y = \quad x' \sin\varphi - y' \cos\theta \cos\varphi$$
$$z = \quad y' \sin\theta$$

(1) Voyez le n°. 6 de la Correspondance, page 179.

et l'on aura

$$\left\{\begin{array}{l}(AA'+BB)\sin^2\theta + BB'\cos^2\theta\cos^2\phi \\ + AA'\cos^2\theta\sin^2\phi - (AB'+A'B)\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi\end{array}\right\} y'^2.$$

$$+ \left\{ BB'\sin^2\phi + AA'\cos^2\phi + (AB'+A'B)\sin\phi\cos\phi \right\} x'^2$$

$$\left\{\begin{array}{l}+2AA'\sin\phi\cos\phi\cos\theta - 2BB'\sin\phi\cos\phi\cos\theta \\ +(AB'+A'B)(\sin^2\phi\cos\theta - \cos^2\phi\cos\theta)\end{array}\right\} x'y'$$

$$+ Mx' + Ny' + P = 0.$$

La section, par ce nouveau plan, sera un cercle, si les coefficiens de x'^2 et y'^2 sont égaux, et si celui de $x'y'$ est $= 0$; or ce dernier devenant nul par la supposition de $\theta = 100^{gr}$. la première relation devient

$$(B\cos\phi - A\sin\phi)(B'\cos\phi - A'\sin\phi) = 0;$$

d'où l'on tire $\text{tang}\,\phi = \frac{B}{A}$ ou $\text{tang}\,\phi = \frac{B'}{A'}$;

mais les droites AM et AM' font avec AX des angles dont les tangentes sont respectivement

$$-\frac{A}{B}, \quad -\frac{A'}{B'}.$$

Donc la base circulaire du cône est perpendiculaire à l'une ou l'autre de ces droites *C. Q. F. D.*

DE LA PERSPECTIVE LINÉAIRE

Par la méthode des points de concours,

Par M. Hachette.

La solution graphique des problèmes de géométrie aux trois dimensions exige en général l'emploi simultané de deux plans de projections qu'on suppose ordinairement l'un horisontal et l'autre vertical; les lignes de construction par lesquelles on résout ces problèmes, sont le plus souvent tracées alternativement sur l'un et l'autre plan; il y a cependant des cas où la dépendance réciproque de ces lignes n'a pas lieu, et pour en

donner quelques exemples, on se rappellera qu'ayant sur un plan horisontal les bases et les sommets de deux surfaces coniques, et le point où ce plan est rencontré par la droite qui joint les sommets des deux cônes, on construit la projection horisontale de la courbe d'intersection des deux surfaces coniques, sans avoir recours à la projection verticale; on obtient de même la projection de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent sur un plan parallèle à ces axes, lorsqu'on s'est donné sur ce plan les axes et les courbes génératrices des surfaces.

La perspective linéaire étant aussi une projection faite sur un plan par des droites concourant en un point, on peut demander dans quels cas cette espèce de projection se construira, sans avoir recours au système de deux projections orthogonales, et quelles seront les données du problême de perspective, pour que sa solution se déduise d'un système de lignes tracées sur un seul plan, celui du tableau. Quel que soit le nombre des points à mettre en perspective, ils peuvent être considérés comme les sommets d'angles égaux dont les côtés sont parallèles, or on sait que les perspectives de tous ces côtés concourent sur le tableau en deux points; donc si on a ces deux points, et si on connoît d'ailleurs les points de rencontre du tableau avec les côtés des angles, il est évident que la perspective de chaque point sera déterminée par la rencontre de deux droites tracées sur le tableau même; tel est le principe qui sert de base à la méthode usitée pour construire les dessins perspectives d'architecture. Dans l'enseignement de cet art, tel qu'il se fait à l'Ecole Polytechnique, on emploie les dessins géométraux pour la composition des monumens, et on fait sentir aux élèves l'utilité des dessins perspectives pour juger l'effet des compositions; il seroit donc à desirer que ceux de MM. les élèves qui desirent cultiver plus particulièrement l'architecture, connussent les méthodes de perspective plus faciles et moins longues que la méthode générale qui est l'objet d'une partie de mon cours de géométrie descriptive. Je me suis proposé de leur faire connoître la méthode *des points de concours*. Les auteurs des traités de perspective l'ont bien indiquée; mais mon objet est d'éviter à nos élèves la lecture longue et pénible des livres qui ont été écrits sur cette matière, et de leur faire voir comment cette méthode-pratique se déduit de nos principes de géométrie aux trois dimensions.

Quel que soit le nombre et la forme des objets dont on demande la perspective, les contours apparens et les arêtes visibles de ces objets sont considérés comme les bases des surfaces coniques, qui ont pour sommet l'œil du spectateur qu'on regarde comme un

point; l'intersection de ces surfaces par le tableau est la perspective demandée.

Les lignes à mettre en perspective étant données par leurs projections sur deux plans rectangulaires, et la surface du tableau étant supposée plane, on mène un troisième plan de projection perpendiculaire à l'un des plans rectangulaires et au plan du tableau; on projette sur ce troisième plan les arêtes des surfaces coniques, et par la combinaison des lignes tracées sur les trois plans de projection, on obtient le développement du tableau, c'est-à-dire la perspective linéaire demandée; cette méthode est rigoureuse, elle est générale; mais on conçoit que dans un grand nombre de cas, il sera très-difficile d'en faire usage: en effet, qu'il s'agisse de la décoration d'un théâtre; on prend ordinairement la toile d'avant-scène pour tableau, et on suppose le spectateur placé immédiatement au-dessous de la première galerie ou des premières loges, et sur la ligne du milieu du parterre dont la direction est perpendiculaire à la toile d'avant-scène; cette toile ayant environ 15 mètres de largeur, le spectateur est au moins en avant de cette toile de 15 mètres; les décorations du théâtre en sont à-peu-près à la même distance en arrière; les objets à mettre en perspective seront, d'après ces hypothèses, éloignés de l'œil du spectateur d'environ 30 mètres; les aires sur lesquelles on traceroit les lignes de projections orthogonales auroient donc cette dimension dans le sens de la longueur, ce qui entraîneroit des opérations graphiques, longues et très-pénibles. Pour les éviter, on a imaginé plusieurs méthodes d'une application commode pour les dessins d'architecture, car c'est principalement pour ce genre de dessins que l'exactitude est nécessaire. Lorsqu'un objet est irrégulier, on peut attribuer l'inexactitude de sa perspective à l'irrégularité de l'objet; mais lorsqu'il s'agit d'un monument dont toutes les parties ont entre elles un certain rapport fixé par l'usage et par le goût des arts, le dessin perspective, qui changeroit ces rapports, produiroit l'effet le plus désagréable.

Une observation très-importante échappe à la plupart de ceux qui commencent la perspective et qui la considèrent comme un simple problème de géométrie; ils supposent le spectateur tellement près du tableau, que la perspective qu'ils ont construite d'après toutes les règles de la géométrie, paroît fausse, et l'est réellement en ce sens, que si un objet étoit placé par rapport à l'œil de la même manière que le tableau, la vue en seroit confuse, et le spectateur n'en distingueroit pas la forme. L'expérience apprend que la distance à laquelle un objet peu étendu nous paroît bien distinct, a pour limite un décimètre environ; quant

à la distance dont on peut éloigner l'objet de l'œil, elle dépend de sa grandeur. On sait, par observation, que le champ ordinaire de la vue a pour limite un cône droit dont le côté fait, avec l'axe environ un demi-angle droit; on sait aussi que les rayons visuels, d'où résulte une image vive des objets, sont peu inclinés par rapport à la surface extérieure de l'œil. On a déduit de ces observations sur l'organe de la vue, deux règles; la première consiste à placer l'œil sur une perpendiculaire au tableau élevé par son milieu; la seconde, à prendre pour distance de l'œil au tableau une largeur à-peu-près égale à celle du tableau, en conservant néanmoins les limites inférieures et de cette distance et de l'angle formé par les rayons visuels extrêmes; lorsqu'en réduisant un bon dessin perspective, on dépasse cette limite, il n'y a pas lieu à s'étonner que la perspective réduite produise un effet différent du premier, et qu'elle soit réputée fausse.

Cela posé, voici le problême de perspective qu'il s'agit de résoudre : « Connoissant les dimensions d'un monument, la po-« sition de l'œil et du tableau par rapport à ce monument, en « construire la perspective sans avoir recours aux plans de pro-« jections, et en ne faisant usage que des cotes qui fixent les « dimensions de toutes les parties dont ce monument est com-« posé. » Il faut distinguer les détails d'un monument, dont les formes irrégulières peuvent varier au gré de l'imagination de l'artiste qui les emploie, des parties principales dont les formes régulières sont susceptibles d'une définition rigoureuse; celles-ci sont terminées par des surfaces qui sont, ou planes, ou cylindriques, ou de révolution; coupées par des plans horisontaux, les sections qui en résultent sont, ou des cercles, ou des carrés et des parallélogrammes dont tous les côtés sont parallèles : en sorte que la perspective de ces sections détermine la perspective entière du monument. (Voyez l'article *Théorie des ombres et de la perspective*, pag. 300.) On voit facilement comment on peut faire dépendre la perspective d'un parallélogramme de celle de deux quarrés construits sur les côtés de ce parallélogramme; la perspective d'un cercle est suffisamment déterminée par celle de deux quarrés à côtés parallèles, dont l'un lui est inscrit et l'autre circonscrit. Ainsi le problême proposé se réduit à tracer la perspective d'un système de quarrés à côtés parallèles contenus dans des plans horisontaux, la longueur des côtés et la distance des plans étant exprimées en nombres et rapportées à une même échelle.

Pour expliquer la solution de ce problême, en faisant usage de la *méthode des points de concours*, nous allons prendre pour exemple une suite de colonnes qu'il s'agit de mettre en pers-

pective. On suppose que les axes verticaux de ces colonnes soient situés dans un même plan et également espacés ; on suppose encore que ce tableau est dans un plan vertical passant par l'axe de la première colonne.

Ayant mené par l'œil un plan horisontal, l'intersection de ce plan avec le tableau est une droite qu'on nomme *droite d'horison*, et qui contient les points de concours de toutes les droites parallèles entre elles et à l'horison ; un second plan horisontal distant du premier d'une quantité donnée, coupe les axes des colonnes en des points placés sur une même droite et équidistans ; proposons-nous d'abord de mettre en perspective des quarrés égaux qui ont ces derniers points pour centres, et qui ont pour côtés des droites d'une longueur donnée, les unes parallèles à la droite qui unit les centres, les autres perpendiculaires à cette même droite ; les côtés rectangulaires des quarrés font avec le tableau des angles dont la grandeur dépend de la position de ce tableau par rapport au plan vertical qui contient les axes des colonnes, et qui ont pour cordes des droites dont la direction est connue. Ayant mené par l'œil des parallèles aux côtés des quarrés, à leurs diagonales et aux cordes des angles que les côtés de ces quarrés font avec le tableau, les points de rencontre de ces parallèles avec le tableau sont les seuls *points de concours* dont on se sert pour mettre en perspective la colonnade entière ; il est évident que ces points de concours sont au nombre de six, et tous *situés sur la droite d'horison*, mais on verra que de ces six points, il n'y en a que quatre nécessaires, parmi lesquels il doit toujours y avoir un des deux points de concours des côtés rectangulaires des quarrés ; on prend pour ces quatre points ceux qui sont le plus rapprochés du centre du tableau, afin d'éviter les lignes qui, par leur longueur, sont difficiles à tracer. Dans l'exemple que nous avons pris, les quatre points de concours qui s'éloignent le moins du tableau, sont 1°. un des points de concours des côtés ; 2°. un des points de concours des diagonales ; 3°. les deux points de concours des cordes ; ils sont marqués des lettres c, c', q, d, sur la fig. 1 (pl. 2), qu'on suppose tracée sur le plan de l'horison mené par l'œil ; A, B, C étant les projections des axes des colonnes sur ce plan, c est le point de concours des parallèles à la corde de l'angle $CBA\,d$ que la droite ABC des centres fait avec la droite d'horison $q\,c\,A\,d$; c' est le point de concours des parallèles à la corde de l'angle EAd, complément du premier CAd ; q est le point de concours de tous les côtés des quarrés, tels que ab, $a'b'$, $a''b''$, etc., d le point des concours des diagonales ab', $a''b'''$, des mêmes quarrés, ces quatre points c, c', q, d, étant placés sur la droite d'horison $q\,c\,A\,d\,c'$.

Soit cette droite d'horison rapportée sur la fig. 2 qu'on suppose tracée sur le plan du tableau, qui, par hypothèse, contient l'axe AA' de la première colonne; nous allons d'abord chercher la perspective des axes des colonnes projetés (fig. 1) en B, C, etc.; mais il faut auparavant faire observer que la projection horisontale de la figure 1 n'est pas nécessaire pour cette recherche; la perspective entière des colonnes doit être tracée, d'après l'énoncé du problême, sur le plan du tableau; cependant, pour faire comprendre les opérations graphiques qu'on exécute sur ce dernier plan, on s'est servi de la figure 1, et pour ne pas être obligé de distinguer les lettres qui correspondent aux figures 1 et 2, nous mettrons en parenthèses les lettres qui appartiennent à la figure 1.

Un plan horisontal quelconque, mené au-dessus ou au-dessous du plan horisontal qui passe par l'œil α du spectateur, coupe les axes des colonnes ou des points qu'on peut considérer comme les centres des quarrés projettés en $(aba'b')$, $(a''b''a'''b''')$ etc.; AA' étant la distance de ces deux plans, A' sera la perspective du centre du premier quarré, et $A'Z$ perpendiculaire à AA' la perspective d'une horisontale menée par ce centre; il s'agit maintenant de trouver la perspective B' du point d'un axe projetté en (B), et qui est le centre du quarré projetté en $(a''b''a'''b''')$.

Ayant décrit l'arc $(B\mathcal{C})$ du point (A) comme centre avec le rayon (AB) donné en modules et parties des modules, la corde $(B\mathcal{C})$ de cet arc est parallèle à la corde de l'angle (BAC), dont on a par hypothèse le point de concours c sur la droite d'horison; le point (B) étant l'intersection de la droite (CB) et de (EB) prolongement de la diagonale $(a''b'')$, sa perspective B' dépend de celle du point projetté en (E); or ce point (E) est l'intersection des deux droites $(\mathcal{C}E)$, (AE), mais $(\mathcal{C}E)$ est parallèle à la corde de l'angle (EAd), dont le point de concours est en c'; donc si on rapporte la droite $(A\mathcal{C})$ sur l'horisontale $A'Z$ de A' en $\mathcal{C}'$, l'intersection des deux droites $\mathcal{C}'c'$, $A'q$ donnera le point E' pour la perspective du point projetté en (E); menant donc les droites $E'd$, $\mathcal{C}'c$, elles se coupent au point B' qu'il s'agissoit de trouver; on obtiendroit de même la perspective C' du point de l'axe projetté en (C), et contenu sur la même horisontale qui a pour perspective $A'B'$, mais pour éviter la longueur des lignes de construction, il sera plus commode de concevoir sur la même horisontale, un autre point dont la projection O divisera en deux parties égales la distance AB. Ayant décrit du point (A) comme centre avec (AO), pour rayon l'arc $(O\omega)$ et porté ce rayon de A' en ω', la droite $\omega' c$ coupe la droite $A'B'$ au point O' perspective du point (O), $O'q$ sera donc la perspective

de la droite projettée en (OR); $A'd$ est la perspective de la droite projettée en (ARL), donc R' commun aux deux droites $O'q$, $A'd$ est la perspective du point projetté en (R); L' et D' correspondans aux points (L) et (D) se trouvent de même par l'intersection de deux droites, le premier par les deux droites $B'q$, $A'd$, le second par les deux droites $B'R'$ et $A'q$; en sorte que la droite projettée en (DLM) est en perspective $D'L'M'$. Maintenant il sera bien facile d'obtenir tant de points qu'on voudra des axes des colonnes; C', par exemple, est à l'intersection de $M'q$ et de $A'B'$, C'' à l'intersection de $M''C''$ et $A'B'C'$.

Si on trouve les points D', L' trop rapprochés pour fixer la direction de la droite $D'L'M'$, on substituera au quarré ($ABLO$) un quarré plus grand, tel que celui qui a (AC) pour côté.

Ayant les perspectives $A'A$, $B'B$, $C'C$, etc., des axes des colonnes (A), (B), (C), etc., proposons-nous de trouver les perspectives des quarrés égaux ($ab\,a'b'$), ($a''b''\,a'''b'''$), qui ont pour perspectives de leurs centres les points A', B', C', et pour cotés des parallèles et des perpendiculaires à la droite (ABC). La cote de (AS) = (AT) = (AV) étant connue, on la portera sur l'horisontale $A'Z$ de A' en T''; l'intersection des droites cT et $A'C'$ donne S' pour la perspective du point (S); l'intersection de $S'q$ avec $A'L'$ donne b' pour la perspective du point (b'); menant $T''c'$, le point V' intersection de cette droite et de $A'D'q$, est la perspective du point (V); X' perspective du point (X) s'obtient comme S' perspective du point (S); menant $X'q$, cette droite rencontre $B'R'D'$ en b'' perspective du point (b''); on auroit de même la perspective b''' de (b'''); tirant la droite $b'b''b'''$, elle contiendra la perspective de tous les côtés des quarrés placés sur la droite ($bb'b''b'''$, ... etc.); on trouvera de même la perspective $aa'a''a'''$ de tous les côtés des quarrés placés sur la droite ($aa'a''a'''$). Les droites $aa'a''a'''$, $bb'b''b'''$, $A'B'C'$ perspectives de droites parallèles concourent en un même point de la droite ABC d'horison, mais on a supposé ce point trop éloigné pour en faire usage; s'il étoit donné, un seul point de la perspective de chacune de ces dernières droites auroit suffi pour la déterminer.

En ne se servant que des lignes déja tracées sur le tableau, on peut vérifier quelques-unes des opérations; par exemple, il est facile de voir que le point b est sur le prolongement de la diagonale $A'a'$ déja connue et dans la direction aq; de même a''' est sur le prolongement de la diagonale $b''B'$.

C'est d'après cette méthode qu'on a mis en perspective les deux piédestaux qu'on voit fig. 3. $qcABdc'$ est la *droite d'horison*, ω la projection de l'œil sur le tableau, $A'B'$ la ligne des centres

des bases des piédestaux; mais cet exemple fait voir comment après avoir trouvé la perspective $aba'b'$ d'un quarré dont le plan horisontal est distant de la *droite d'horison* de la quantité AA', on obtient la perspective du même quarré transporté parallèlement à lui-même, de telle manière que son centre ait parcouru la droite $I'D$ dont la cote est donnée; ayant mené la diagonale Dd et les verticales ah, $b'f$, on achève la perspective $fheg$, en menant des droites he, fg vers le point de concours q. Le quadrilatère $k\ l\ m\ n$ est sur le second piédestal la perspective du quarré correspondant à celui qui a pour perspective $e\ f\ g\ h$, et le quadrilatère $e\ h\ m\ n$ est évidemment la perspective d'un parallélogramme dont les côtés ont même saillie sur les faces rectangulaires du piédestal; reprenant la construction de la perspective de la colonnade, cette dernière observation nous offre le moyen de mettre en perspective les faces planes de l'entablement terminées par des parallélogrammes; car ces parallélogrammes s'étendent de la première colonne à la dernière, et le plan de chacun d'eux coupe les axes de ces colonnes en deux points qu'on peut considérer comme les centres de deux quarrés formant ses extrémités. La perspective de ces deux carrés détermine donc celle d'un parallélogramme quelconque de l'entablement.

Conclusion.

Nous avons donné le moyen de mettre en perspective des quarrés à côtés parallèles, contenus dans des plans horisontaux, et qui ont leurs centres sur les axes des colonnes. D'après ce qui a été dit (pag. 315), on en conclut la perspective des parallélogrammes de l'entablement de la colonnade et la perspective des cercles horisontaux qui appartiennent aux surfaces courbes de cette même colonnade; d'où il suit qu'ayant le géométral d'un ordre quelconque d'architecture, on construira directement la perspective sur le tableau, en ne faisant usage que des cotes qui fixent les dimensions des parties de cet ordre.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

« Etant donnée une pyramide triangulaire, on propose de la « couper par un plan en deux parties équivalentes en volume, « de telle manière que l'aire de la section plane qui sépare ces « deux parties soit un *minimum*. »

Ce problème est analogue à celui-ci, qui m'a été donné par M. de S**, ancien officier du génie :

« Etant donné un triangle, le diviser en deux parties équi-
« valentes en surface par une droite *minimum*. »

H. C.

LETTRE de M. FRANÇAIS, *capitaine au corps impérial du génie, ancien élève de l'Ecole Impériale Polytechnique, à M. Hachette.*

Strasbourg, le 17 avril 1807.

J'ai l'honneur de vous adresser, par la voie de mon ancien camarade Oberlin, un petit mémoire sur la transformation des coordonnées. Je ne connois pas de solution générale de ce problème, c'est-à-dire pour passer d'un système de coordonnées obliques à un autre : j'y parviens d'une manière (à ce qui me semble) assez simple et analytique ; et le résultat, renfermé dans les équations (29), me paroît très-simple et très-symétrique. Je vous prie de vouloir bien faire connoître ce résultat par la voie de votre Correspondance sur l'Ecole Impériale Polytechnique, le reste du mémoire ne contenant rien de neuf ni d'assez remarquable pour mériter d'y trouver place. Au reste, je le mets entièrement à votre disposition : vous en ferez ce que vous jugerez convenable (1). Je n'aurois pas osé vous adresser cette bagatelle, si mon commandant, M. Malus, ne m'y avoit engagé.

Je suis charmé, Monsieur, de trouver cette occasion de vous témoigner, etc.

Votre élève, J. FRANÇAIS.

COURS DE GRAMMAIRE ET DE BELLES-LETTRES.

M. Andrieux, professeur de littérature à l'Ecole Polytechnique, a repris ses cours pour la première division, au 1er. novembre 1806 ; et pour la seconde, aussitôt que les élèves arrivans ont été réunis.

Les conseils d'instruction et de perfectionnement avoient approuvé un rapport sur le programme (2) de ces cours, et le

---

(1) La commission chargée de l'impression du Journal de l'Ecole Impériale Polytechnique, a mis ce travail au nombre des Mémoires du 14e. cahier, qu'on imprime actuellement.

(2) Ce rapport et le programme sont imprimés à la suite du rapport général du Conseil de perfectionnement, session de 1806.

programme lui-même qui leur avoient été soumis dans leurs sessions de 1806.

Il en résulte que les cours de grammaire et de belles-lettres, à l'École impériale Polytechnique, sont divisés et distribués dans l'ordre suivant :

Le cours de grammaire a deux parties.
Le cours de belles-lettres en a quatre.

DANS LA PREMIÈRE ANNÉE.

Cours de grammaire.

1°. Grammaire générale et logique.
2°. Grammaire française.

Cours de belles-lettres.

1°. Art d'écrire.

DANS LA SECONDE ANNÉE.

Suite du cours de belles-lettres.

2°. De l'éloquence.
3°. De la poésie.
4°. Histoire abrégée de la langue et de la littérature françaises, depuis Charlemagne.

Le tableau ou sommaire de chaque leçon est imprimé et distribué aux élèves, le matin du jour où la leçon est donnée. Ce sommaire aide les élèves à saisir pendant la leçon les développemens que donne l'instituteur; il leur sert aussi à fixer ces mêmes développemens dans leur mémoire, et à les retrouver au besoin.

On donne tous les quinze jours, à chaque division, le sujet d'une composition par écrit.

Les élèves sont aussi exercés à la lecture à haute voix ; l'instituteur leur fait lire soit leurs propres compositions, soit des morceaux de nos meilleurs auteurs, en vers ou en prose, qui servent de texte et de matière à une partie des leçons.

SUJETS DE COMPOSITION

Donnés à la première division.

1°. Lettre du cardinal Sadolet à François Ier., roi de France, pour en obtenir des défenses d'exécuter l'arrêt rendu en 1540

contre les Vaudois par le parlement de Provence, arrêt qui ordonnoit la destruction et l'incendie des bourgs de Merindol et de Cebrieres.

(*Voy. Histoire de France, de Vély ; règne de François* Ier.)

2°. ART, SCIENCE, SAVOIR, DOCTRINE.

Comparer ces mots entre eux, en marquer les rapports et les différences ; déterminer le sens de chacun.

3°. Comparer deux imitations en vers français du fameux monologue d'Hamlet: *To be or not be*, etc. Dire à laquelle des deux on donne la préférence, et par quels motifs.

4°. Rédiger, par écrit l'analyse de plusieurs des leçons qui ont été données sur l'état et les progrès de la langue et de la littérature françaises, depuis Charlemagne.

Ce cours d'histoire littéraire en est actuellement (au mois de mai) *au commencement du* 16°. *siècle.*

A la deuxième division.

1°. Discours de Guillaume de Nesle au roi Jean, le 18 septembre 1356, veille de la malheureuse bataille de Poitiers.

(Ce brave chevalier ouvre inutilement, dans le conseil de guerre, des avis prudens qui ne sont point écoutés.)

(Voy. *Ibid.*, *règne de Jean II.*)

2°. Le commandant anglais de Châteauneuf-Randon fait hommage des clefs de cette place au connétable Duguesclin après sa mort, en les déposant à ses pieds sur son lit funèbre. (1379). Narration et discours.

(Voy. *Histoire de France, règne de Charles V.*)

3°. Discours de Jeanne d'Arc, dite *la Pucelle d'Orléans*, devant le prétendu tribunal qui la condamna au feu, en 1431, comme hérétique et magicienne.

(Voy. *Ibid.*, *règne de Charles VII.*)

4°. Henri III, voulant faire assassiner le duc de Guise et le cardinal de Guise son frère aux états de Blois, en 1588, confie son projet à quelques-uns de ses plus affidés serviteurs. Le brave Crillon, l'un d'eux, fait tous ses efforts pour le détourner de recourir à cet assassinat.

Faire le discours de Crillon.

MATHÉMATIQUES.

M. *Francœur* a mis au jour une quatrième édition de son Traité élémentaire de mécanique, adopté pour l'instrution publique.

PHYSIQUE.

Les sciences physiques viennent d'être enrichies d'un nouvel ouvrage de MM. Biot et Arago, qui a pour titre :

Mémoire sur les affinités des corps pour la lumière, et particulièrement sur les forces refringentes des différens gaz.

Lu à l'Institut, le 24 mars 1806.

SERVICE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

M. Lamandé, fils, ancien élève, ingénieur en chef des Ponts-et-Chaussées, qui a fait construire le magnifique pont d'Austerlitz, est chargé des travaux du nouveau pont en fer qui doit traverser la Seine en face l'Ecole-Militaire, et qu'on a nommé *Pont d'Jena*. Le quai de la tête du pont à la barrière de *Chaillot*, porte le nom du général *Billy*, tué à la bataille d'*Jena*.

§. II. *Extrait du rapport du Conseil de perfectionnement de l'Ecole Impériale Polytechnique, session de* 1806.

SUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

Programme des connaissances exigées pour l'admission à l'Ecole Impériale Polytechnique.

Les connaissances exigées pour l'admission à l'Ecole Impériale Polytechnique, sont,

1°. L'arithmétique et l'exposition du nouveau système métrique : on insistera sur l'application du calcul décimal à ce système ;

2°. L'algèbre comprenant la résolution des équations des deux premiers degrés, celle des équations indéterminées du premier degré, la composition générale des équations, la démonstration de la formule du *Binome de Newton* dans le cas seulement des exposans entiers positifs, la méthode des diviseurs commensurables,

celle des racines égales, la résolution des équations numériques par approximation, l'élimination des inconnues dans deux équations d'un degré quelconque à deux inconnues;

3°. La théorie des proportions, des progressions, des logarithmes, et l'usage des tables;

4°. La géométrie élémentaire, la trigonométrie rectiligne, et l'usage des tables des sinus;

5°. La discussion complette des lignes représentées par les équations du premier et du second degré à deux inconnues, et les propriétés principales des sections coniques;

6°. La statique appliquée à l'équilibre des machines les plus simples, telles que le levier, la poulie, le plan incliné, le treuil, la vis, la machine funiculaire, les moufles, les roues dentées et la vis sans fin;

7°. Les candidats seront tenus de traduire, sous les yeux de l'examinateur, un morceau des *Offices de Cicéron;* ils feront ensuite l'analyse grammaticale de quelques phrases françaises de leur traduction.

On exigera aussi qu'ils sachent écrire lisiblement.

8°. Ils seront enfin tenus de copier une tête d'après l'un des dessins qui leur seront présentés par l'examinateur.

Tous ces articles sont également obligatoires.

(Les examens s'ouvriront le 15 août à Paris et dans les principales villes de l'Empire.)

Les candidats déclareront, suivant l'usage (à MM. les examinateurs d'admission), le service auquel ils se destinent, et subsidiairement tous les autres, dans l'ordre suivant lequel ils doivent y entrer; mais au lieu d'être reçus dans les services publics en entrant à l'École, et d'après le résultat d'examen d'admission, ils n'y seront classés qu'en quittant l'École et d'après les résultats des examens de sortie. Ainsi leur état ne dépendra plus seulement de leur premier examen, mais de leurs succès dans le cours entier de leurs études. Le conseil a regardé cette mesure comme un acte de justice envers les élèves, et comme le principe d'une émulation favorable à leurs progrès.

§. III. PERSONNEL.

Le conseil de perfectionnement avoit décidé, dans sa session de 1806, que M. Poisson, instituteur d'analyse, et M. Labey, instituteur de mécanique, changeroient de cours; d'après cette mutation, agréable aux professeurs et favorable à l'instruction, M. Poisson a commencé son cours de mécanique le 23 avril 1807.

Les besoins urgens des services publics n'ont pas permis cette année de conserver d'anciens élèves pour remplir les fonctions de chefs d'étude dans les brigades de la 2e. division composée des nouveaux admis; ces places ont été confiées aux sujets placés à la tête de la dernière promotion; pour les mettre en état de remplir ces places avec distinction, M. Monge leur a fait pendant deux mois un cours particulier. Les leçons de ce célèbre professeur reçues par les élèves élite de l'École Polytechnique, ont produit les heureux effets qu'on devoit en attendre.

Etat-major du bataillon de l'Ecole Impériale Polytechnique, au 1er. mai 1807.

MM. Lacuée, ...	*gouverneur*, ...	grand officier de la légion d'honneur.
Gayvernon,	*commandant en second*	légionnaire.
Davignon, .	*chef de bataillon*,	*Idem.*
Marielle, ...	*capitaine-quartier-maître-trésorier.*	
Redon, ...	*capitaine*, ...	*Idem.*
Richard, ...	*capitaine*, ...	*Idem.*
Bourdellet, .	*lieutenant*, ...	*Idem.*
Letroublon,	*lieutenant*, ...	*Idem.*
Rostan, ...	*adjudant*, ...	*Idem.*
Clément, ...	*adjudant*, ...	*Idem.*

Le Bulletin de la Grande-Armée, du 9 février 1807, a consacré la conduite héroïque et la mort glorieuse du colonel Antoine *Lacuée* à la bataille d'Eylan. Cet officier étoit frère du colonel Lacuée (1) tué l'an dernier aux ponts sous Gunzbourg, et neveu de M. le Gouverneur de l'École impériale Polytechnique.

§. IV. PERSONNEL DES ÉLÈVES.

M. Bertrand, cité page 127 de cette Correspondance, a été nommé général de division de l'arme du génie; il a pour aide-

(1) Voyez la Correspondance, page 203.

de-camp M. Paporet, de la promotion de 1797, capitaine du génie, membre de la légion d'honneur.

M. Joseph Goll de la promotion de 1795, M. Prevost-Vernoy de la promotion de 1795, ont été nommés chefs de bataillon du génie militaire.

M. Mathieu, officier très-distingué, de la promotion de 1803, a été tué au siége de Neiss, en Silésie.

M. Gaultier, de la promotion de 1799, a été nommé professeur de mathématiques et de géométrie descriptive au Conservatoire des Arts et Métiers, administré par MM. Molard et Montgolfier.

---

§. V. ACTES DU GOUVERNEMENT.

Paris, le 28 avril 1807.

J. G Lacuée, Conseiller d'Etat, Gouverneur de l'Ecole Impériale Polytechnique, à M. de Vernon, commandant en second l'Ecole Impériale Polytechnique.

J'ai l'honneur de vous adresser, Monsieur, copie d'un article de mon instruction approuvée par le Ministre; je vous autorise à donner connaissance de cette décision aux différens instituteurs des écoles préparatoires.

« Tout aspirant à l'Ecole Impériale Polytechnique à qui un « professeur du lycée ou de tout autre établissement autorisé « délivrera un certificat dans lequel il déclarera qu'il croit en « son ame et conscience que N....., son élève, est assez ins- « truit pour être admis à l'Ecole Impériale Polytechnique, ob- « tiendra du conseil de recrutement un sursis de départ jusqu'au « 1er. novembre; à cette époque il devra être rendu à l'École « Impériale Polytechnique, s'il y est admis; dans le cas con- « traire, il sera dirigé sur l'un des corps qui se recrutent dans « le département. »

J'ai l'honneur de vous saluer avec une considération distinguée,

Signé J. G. LACUÉE.

PRÉCIS

Sur l'Ecole Impériale Polytechnique.

Leurs Majestés le roi de Naples et le roi de Hollande ayant demandé des détails sur la création et sur l'organisation de l'École Polytechnique, M. le Gouverneur a fait rédiger le Précis suivant. On a pensé que les détails qu'il contient pourroient intéresser les élèves et les personnes qui ne connoissent que depuis peu de tems l'École Polytechnique. C'est ce motif qui a engagé à l'insérer dans la *Correspondance*.

L'École impériale Polytechnique, connue d'abord sous le nom d'*École centrale des travaux publics*, fut créée dans ces tems malheureux où les écoles spéciales des services publics tout-à-fait désorganisées, avoient vu fuir de leur sein les professeurs et les élèves, les uns pour se soustraire à la persécution, les autres pour aller servir dans nos armées. A cette époque, la France attaquée par l'Europe entière, réclamoit le secours d'ingénieurs habiles, et étoit menacée de n'en plus trouver. Ce fut dans de telles circonstances que des hommes également distingués par leurs vastes connoissances et par un patriotisme éclairé, conçurent le projet de créer une école qui remplaçât celle qu'on venoit de détruire. Bientôt toute l'élite de la jeunesse se réunit à la voix de tels maîtres qui se dévouoient si généreusement à son instruction; et trois mois s'écoulèrent à peine que déja cette institution avoit pris un caractère assez imposant pour forcer les ennemis mêmes des sciences, à respecter l'asyle où elles s'étoient réfugiées.

Nous allons rapporter sommairement les différens décrets, lois, arrêtés et dispositions relatifs à la création et à l'organisation de l'École Polytechnique.

D'abord un article du décret de la Convention, du 21 ventôse an II (11 mars 1794), portant établissement d'une commission des travaux publics, est ainsi conçu :

« Cette commission s'occupera de l'établissement d'une école « centrale des travaux publics, et du mode d'examen et de con- « cours auxquels sont assujettis ceux qui voudront être employés à « la direction de ces travaux. »

Un autre décret du 7 vendémiaire an III, règle l'organisation de l'école centrale des travaux publics, et en fixe l'ouverture au

10 frimaire suivant (1); mais plusieurs circonstances retardèrent cette ouverture jusqu'au 21 décembre (1er nivose an III) de la même année. D'après une disposition de ce dernier décret, un concours fut ouvert dans 22 villes principales de la France, et l'on admit 391 élèves (2) qui fournirent les preuves de leur instruction et de leur intelligence, dans un examen sur l'arithmétique, les élémens d'algèbre et la géométrie.

Première organisation de l'Ecole Impériale Polytechnique.

La première organisation, sous le titre d'*École centrale des travaux publics*, est du 26 novembre 1794 (6 frimaire an III). Elle fixe le mode d'enseignement qui a toujours eu deux branches principales, les sciences mathématiques et les sciences physiques. Les premières comprennent, 1°. l'analyse avec ses applications à la géométrie et à la mécanique; 2°. la géométrie descriptive, qui se divise en trois parties, *géométrie descriptive pure*, *architecture et fortifications*, et à laquelle se trouve joint le dessin, considéré soit comme un moyen peu rigoureux, il est vrai, mais souvent le seul possible de décrire les objets.

Les sciences physiques renferment la physique générale et la chimie. Ce qui distingue cet enseignement de tous ceux qui avoient été pratiqués jusqu'alors, c'est que les élèves travaillent dans l'intérieur même de l'Ecole; qu'ils sont distribués par salles pour le dessin de la géométrie descriptive et l'étude de l'analyse; qu'ils ont des laboratoires pour s'exercer aux manipulations chimiques; et qu'ils exécutent de leurs propres mains les dessins, les calculs et les opérations chimiques qui ont été l'objet des leçons orales des professeurs.

Ce mode d'enseignement est le caractère distinctif de l'Ecole Polytechnique. A l'origine, la durée des études pour chaque jour étoit de 9 heures; savoir: de 8 heures du matin à 2 heures après midi, et de 5 heures du soir à 8; et celle du cours entier devoit être de trois ans. Comme les élèves avoient été admis à-la-fois, avec une instruction à-peu-près égale, et qu'il falloit pouvoir les distribuer en trois classes pour suivre chacune des trois années d'étude, on imagina de faire des cours préliminaires dans lesquels chaque professeur présenta le tableau concis de la science qu'il avoit à traiter; il en résulta un ensemble de programmes précieux et pour les élèves et pour les professeurs eux-mêmes.

---

(1) Voyez les développemens de ce décret (petite brochure).

(2) Voyez leurs noms, n°. 4 de la Correspondance.

A la fin de ces cours préliminaires qui durèrent trois mois, du 21 décembre 1794 (1er. nivose an III) au 21 mars (1er. germinal), les élèves furent divisés en trois classes, qui suivirent alors les cours institués pour chacune d'elles; et chaque classe ou division fut partagée en brigades de 20 élèves : chaque brigade eut sa salle d'étude et son laboratoire de chimie, et elle fut présidée par un chef capable d'entretenir l'ordre et de lever les difficultés que les élèves rencontroient dans leur travail. D'après la marche habituelle que devoit suivre l'École, il falloit choisir ces chefs parmi les élèves les plus instruits; mais, à l'origine, ce mode d'élection n'étoit pas praticable; un certain nombre de jeunes gens du plus grand mérite reçurent une instruction particulière dans une école préparatoire, et se mirent en état d'exercer les fonctions de chefs.

Pour former cette école préparatoire qui fut ouverte vers le milieu de novembre 1794, on choisit une maison qui étoit à la disposition du comité de salut public, et qui renfermoit un laboratoire de chimie dirigé par M. Guyton, un atelier pour la fabrication des lames de sabre, et plusieurs salles très-vastes. M. Monge, à qui l'Ecole Polytechnique doit sa création, y donna des leçons de géométrie descriptive et d'analyse appliquée à la géométrie; il fut aidé dans ce travail par M. Hachette, qu'il avoit choisi pour son adjoint; M. Jacotot, actuellement proviseur au lycée de Dijon, et M. Barruel, auteur des Tableaux de physique, et bibliothécaire de l'Ecole Polytechnique, y firent des cours de chimie et de physique.

Le 21 mars 1795, époque à laquelle l'École Polytechnique fut mise en activité, les 25 élèves les plus distingués de l'École préparatoire furent nommés chefs de brigade; on trouvera dans le N°. 4 de la Correspondance, page 93, la liste de ces chefs, parmi lesquels on remarque MM. Berge, Biot, Francœur, Malus, etc., etc.

Il ne suffisoit pas d'avoir des hommes capables de transmettre l'instruction, il falloit encore préparer les porte-feuilles des professeurs de géométrie descriptive. Chacune des parties de cette science, telles que la géométrie descriptive pure qui n'avoit jamais été enseignée publiquement, la coupe des pierres, la charpente, la perspective, les ombres, l'architecture, les travaux civils et la fortification, exigeoit une collection de dessins et d'épures gravés. Une réunion des meilleurs dessinateurs de Paris, dirigée par MM. les instituteurs, s'occupa sans relâche de la confection des dessins qui devoient servir de modèles et être distribués à la suite de chaque leçon : en même tems des artistes très-distingués moulèrent

en plâtre des modèles de coupe des pierres et d'architecture. Tous ces établissemens provisoires mirent en état de fixer l'ouverture de l'École au 21 décembre 1794 (1er. nivose an III), conformément à son organisation du 26 novembre précédent (6 frimaire an III).

D'après cette organisation, l'École étoit dirigée, tant pour l'administration que pour l'instruction, par un conseil formé par les administrateurs et les instituteurs. Le tableau ci-joint pag. 333, fait connoître le nom des membres de ce conseil à son origine.

Seconde organisation de l'Ecole Impériale Polytechnique.

Un décret du 1er. septembre 1795 (15 fructidor an III) changea le nom d'*École centrale des travaux publics* en celui d'*École Polytechnique*, et détermina le mode d'admission des élèves de cette école dans les services publics.

Cette seconde organisation de l'Ecole Polytechnique diffère peu de la première; elle fixe d'une manière plus précise le mode d'examen pour le passage aux écoles d'application des services publics; elle est du 20 mars 1796 (30 ventôse an 4).

Troisième organisation de l'Ecole Impériale Polytechnique.

L'Ecole Polytechnique avoit suppléé, dès sa naissance, à la foiblesse des moyens que les différentes écoles d'application présentoient pour l'entretien des corps d'ingénieurs. Cependant on avoit conservé ces mêmes écoles; sauf ou à les supprimer au cas que l'Ecole Polytechnique les rendît inutiles, ou à les organiser pour des élèves qui auroient reçu l'instruction polytechnique. Ce fut ce dernier parti que l'on adopta.

Une loi du 22 octobre 1795 (30 vendémiaire an IV) fixa les relations de l'Ecole Polytechnique avec les écoles d'Artillerie, du Génie, des Ponts et Chaussées, des Mines, des Constructions de vaisseaux, et des Ingénieurs géographes. La durée des études dans ces écoles étoit au moins de deux ans, et chaque élève de l'Ecole Polytechnique ne devant plus acquérir que les connoissances générales de l'ingénieur pour se livrer ensuite plus spécialement au service public de son choix, la durée des cours de l'Ecole Polytechnique qui étoit de trois ans, fut réduite à deux, ce qui exigea une nouvelle organisation, qui date du 16 décembre 1799 (25 frimaire an VIII), et qui diffère des deux premières par

le nombre des agens et par la formation d'un conseil de perfectionnement.

Par cette organisation on supprima deux professeurs de géométrie descriptive appliquée, un professeur de physique, trois professeurs de chimie, un préparateur général de chimie, trois substituts de l'inspecteur des études, un conservateur des modèles et son adjoint; enfin les deux places de bibliothécaire et de secrétaire du conseil d'instruction furent réunies en une seule.

Le titre 7 de la même organisation du 25 frimaire an VIII, règle la composition d'un conseil de perfectionnement qui doit s'assembler chaque année pour examiner la situation de l'école, en perfectionner l'instruction, et établir des relations avec les écoles des services publics (1).

On a vu dans les trois organisations précédentes le mode d'instruction bien établi, les heures de travail fixées, et une police sévère entretenue dans les salles d'étude, mais les lois n'avoient rien statué sur l'existence des élèves hors de l'enceinte de l'Ecole. Le danger qu'une jeunesse livrée à elle-même couroit au milieu de Paris, avoit déjà alarmé le fondateur de l'École; les articles 4, 5, 6 et 7 du titre III de la première organisation du 26 novembre 1794, avoient pour objet de diminuer ce danger en confiant les élèves à des amis de leur famille ou à des maîtres de pension honnêtes. L'expérience démontra bientôt que ces mesures étoient insuffisantes. Depuis longtems on méditoit le projet de les caserner. D'ailleurs les services publics militaires employant environ les trois quarts des élèves sortans de l'Ecole Polytechnique, on regarda comme indispensable de les habituer de bonne heure à un régime militaire; ce qui détermina l'organisation suivante.

Quatrième organisation de l'Ecole Impériale Polytechnique.

Un décret impérial du 16 juillet 1804 (27 messidor an XII) détermine l'organisation militaire de l'Ecole Polytechnique. (Il est inséré dans la Correspondance, pag. 69.)

Un rapport de M. le gouverneur à S. M. l'Empereur, fait connoître la situation de l'Ecole au 27 février 1806.

Le rapport du conseil de perfectionnement, d'après sa session de l'an 1805 (an XIV), contient les programmes des différens cours, et donne tous les développemens nécessaires sur l'objet et la durée des études de l'Ecole Polytechnique. En comparant ce

(1) Voyez la Correspondance, pag. 168.

rapport à ceux qui l'ont précédé, on voit que les principaux changemens dans l'instruction consistent :

1°. Dans la création d'une chaire de grammaire et belles-lettres, occupée par M. Andrieux.

2°. Dans la réunion du cours des mines à celui des travaux et constructions civiles.

3°. Dans l'addition d'un cours sur les élémens des machines à celui de géométrie descriptive.

4°. Dans l'addition d'un cours de topographie à celui d'art militaire.

Le rapport du conseil de perfectionnement, d'après sa session de l'an 1806, donne la série complette des programmes d'instruction, suivant les bases adoptées dans la session précédente.

Les sujets nombreux fournis aux services publics à la fin de l'année, et les résultats avantageux qu'offrent les comptes de l'administration, sont la preuve la plus certaine que le régime actuel de l'Ecole, loin d'avoir nui aux études, n'a servi qu'à les favoriser. Les élèves ont d'ailleurs trouvé dans ce régime la santé et l'habitude du travail; les parens, la conservation des mœurs de leurs enfans; l'Etat enfin, des hommes habitués à la subordination, instruits dans les exercices militaires, et susceptibles, quelle que soit la carrière qu'ils suivent, de le servir à-la-fois de la plume et de l'épée.

NOTICE HISTORIQUE

Sur les Ecoles de services publics.

Artillerie. Une école d'artillerie avoit été établie à Douay en 1679; elle subsista peu de tems. Ce ne fut qu'en 1720 que Louis XV en forma dans toutes les villes de garnison des troupes d'artillerie, telles qu'elles existent encore actuellement.

En 1756, on institua à la Fère une école d'*élèves* du corps d'artillerie. Un académicien les examinoit tous les six mois, et sur son rapport, ils passoient aux emplois d'officiers. Cette école d'élèves, détruite en 1772, fut rétablie à Châlons-sur-Marne, en 1790; elle a été réunie à celle du génie (établie à Metz) en octobre 1802.

Ponts et chaussées. L'école des ponts et chaussées a été créée en 1747 par M. de Trudaine. M. Perronet en a été nommé le directeur à l'époque de sa création.

Génie militaire. L'école du génie a été créée en 1748, sous le ministère de M. d'Argenson. MM. Chatillon et Duvignau en ont fondé l'institution. Cette école compte parmi ses professeurs les Nollet, Bezout, Bossut, Monge, etc.

Génie maritime. L'école des ingénieurs constructeurs a été établie à Paris en 1765; elle a été transférée à Brest en 1802.

Mines. L'école des mines a été créée en 1794. Les premiers professeurs de cette école étoient MM. Vauquelin, Hassenfratz, Haüy, Schreiber; les cours se faisoient à Paris, à l'administration des mines. Une loi du 12 février 1802 a transformé l'école des mines de Paris en deux écoles pratiques établies l'une à Moutiers, département du Mont-Blanc, et l'autre à Greeslautern, département de la Sarre.

LISTE des membres du Conseil d'instruction et d'administration de l'Ecole Polytechnique, à l'époque de sa formation (frimaire an 3, novembre 1794).

Administration.	Lamblardie.....(1)	Directeur.
	C. Gardeur Lebrun. (2)	Adjoint, chargé du personnel des élèves.
	Gasser.....	Adjoint, chargé du matériel.
Analyse.	Lagrange. Prony. Arbogast. Ferry.	Instituteurs.

(1) Jacques-Elie Lamblardie, inspecteur général et directeur de l'école des ponts et chaussées, est mort le 6 frimaire an 6 (26 novembre 1797), âgé de 50 ans. Ayant quitté la direction de l'Ecole Polytechnique, il avoit remplacé M. Delorme, instituteur de cette Ecole, chargé du cours des ponts et chaussées.

(2) Charles Gardeur Lebrun, inspecteur des études de l'Ecole Polytechnique, est mort le 7 fructidor an 9 (25 août 1801), âgé de 57 ans. Il a été remplacé dans les mêmes fonctions par M. Claude Lebrun, son frère.

Géométrie descriptive.	Monge.	Instituteurs.
	Delorme.	
	Dobenheim.	
	Hachette.	Adjoints.
	Martin de Campredon.	
	Baltard.	
Dessin.....	Neveu.....	Instituteur.
Physique générale.	Hassenfratz.....	Instituteur.
	Barruel.....	Adjoint.
Physique particulière.	Fourcroy.	Instituteurs.
	Guyton.	
	Berthollet.	
	Vauquelin.	Adjoints.
	Pelletier. (1)	
	Chaptal.	

Secrétaire du conseil, M. Jacotot.

Le conseil étoit présidé par l'un de ses membres choisi au scrutin. M. Lagrange a le premier occupé la place de président; M. Guyton présidoit le conseil, avec le titre de directeur, à l'époque de la création d'un gouverneur.

---

(1) Bernard Pelletier, membre de l'Institut, mort le 21 juillet 1797, âgé de 35 ans.

Voyez les articles *Nécrologie*, dans le Journal de l'Ecole, 5e. cahier, pag. 179, et 11e. cahier, pag. 356.

ERRATA.

N°. 7, page 263, ligne 15, au lieu de Mecquot, *lisez* : Mocquot.
Idem, page 264, ligne 2, au lieu de Dollustz, *lisez* : Dollfusz.

N°. 8, page 287, ligne 18, au lieu de $-\frac{1}{3}\zeta$, *lisez* : $-\frac{1}{3}$ (

TABLE

DES MATIÈRES CONTENUES DANS CE NUMÉRO.

Solution analytique de la pyramide triangulaire, comprenant la trigonométrie sphérique, et son application à la mesure du méridien; par M. Hachette.

Sur le mouvement d'un fluide pesant, incompressible et homogène, qui s'écoule d'un vase par un orifice horisontal, en admettant l'hypothèse du parallélisme des tranches horisontales; par M. Poisson.

Note sur le belier hydraulique; par M. Hachette.

Sur la théorie des ombres et de la perspective, sur les points brillans des surfaces courbes; par MM. Monge et Hachette.

Problême de géométrie, résolu graphiquement, en ne faisant usage que de la règle. (Article de M. Hachette.)

Des courbes du second degré; par M. Brianchon, officier d'artillerie, ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

Démonstration analytique d'un théorême de géométrie donné par M. Hachette; par M. Puissant, professeur de mathématiques à l'école militaire de Fontainebleau.

De la perspective linéaire par la méthode des points de concours; par M. Hachette.

Enoncé de problêmes à résoudre.

Lettre de M. Français, *officier du génie, ancien élève de l'Ecole Polytechnique.*

Du cours de grammaire et de belles-lettres, fait à l'Ecole Polytechnique par M. Andrieux, *membre de l'Institut.*

Annonce d'ouvrages faits par d'anciens élèves de l'Ecole Polytechnique.

Extrait du rapport du conseil de perfectionnement, session 1806, sur l'admission à l'Ecole Polytechnique.

Personnel.

Lettre de M. Lacuée, *Gouverneur de l'Ecole impériale Polytechnique, sur les aspirans à l'Ecole Polytechnique soumis à la conscription de* 1807.

Précis historique sur l'Ecole impériale Polytechnique.

Notice sur les écoles de services publics.

Liste des membres du conseil d'instruction.

Sur les figures contenues dans les deux planches jointes à ce Numéro.

PLANCHE Ire.

Fig. 1, 2, 3,..... *Trigonométrie sphérique.*

Fig. 4,..... *Mémoire de mécanique*; par M. Poisson.

Fig. 5, 6,..... *Solution d'un problème de géométrie, par la règle seulement.*

Fig. 7, 8, 9, 10,. *Mémoire de géométrie*; par M. Brianchon.

Fig. 11,..... *Géométrie analytique*; par M. Puissant.

PLANCHE IIe.

Fig. 1, 2, 3,..... *Perspective linéaire par la méthode des points de concours.*

Fig. 1.

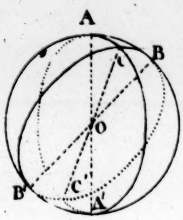


Fig. 2.

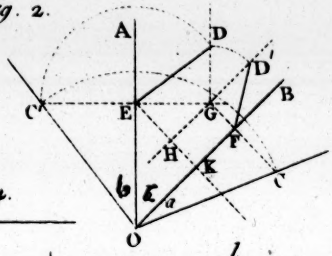


Fig. 3

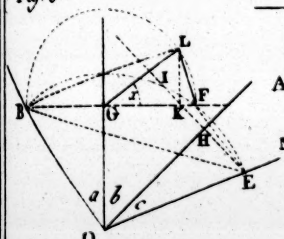


Fig. 4.

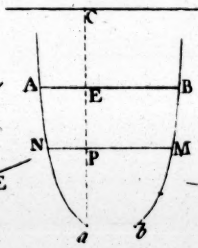


Fig. 5.

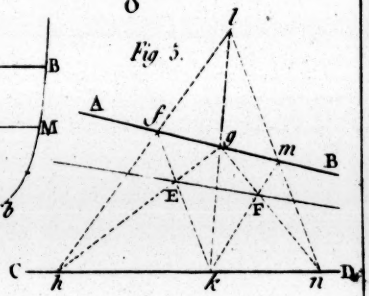


Fig. 6

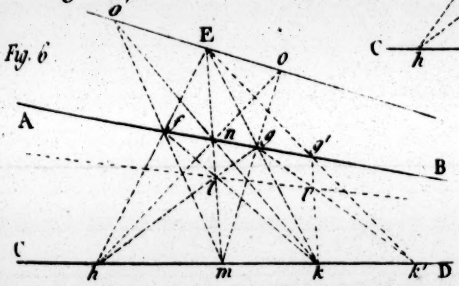


Fig. 11.

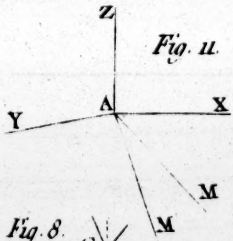


Fig. 7.

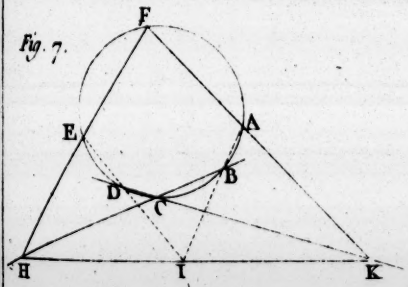


Fig. 8.

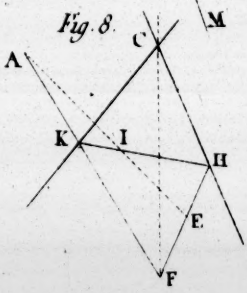


Fig. 9.

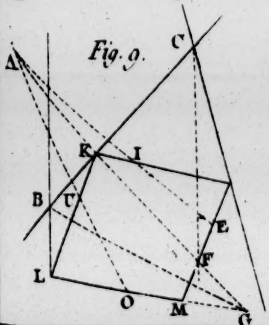
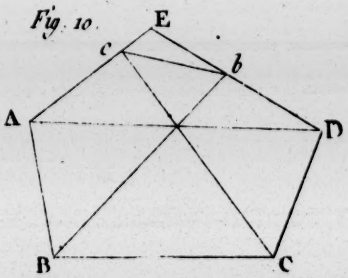


Fig. 10.



Girard Sculp

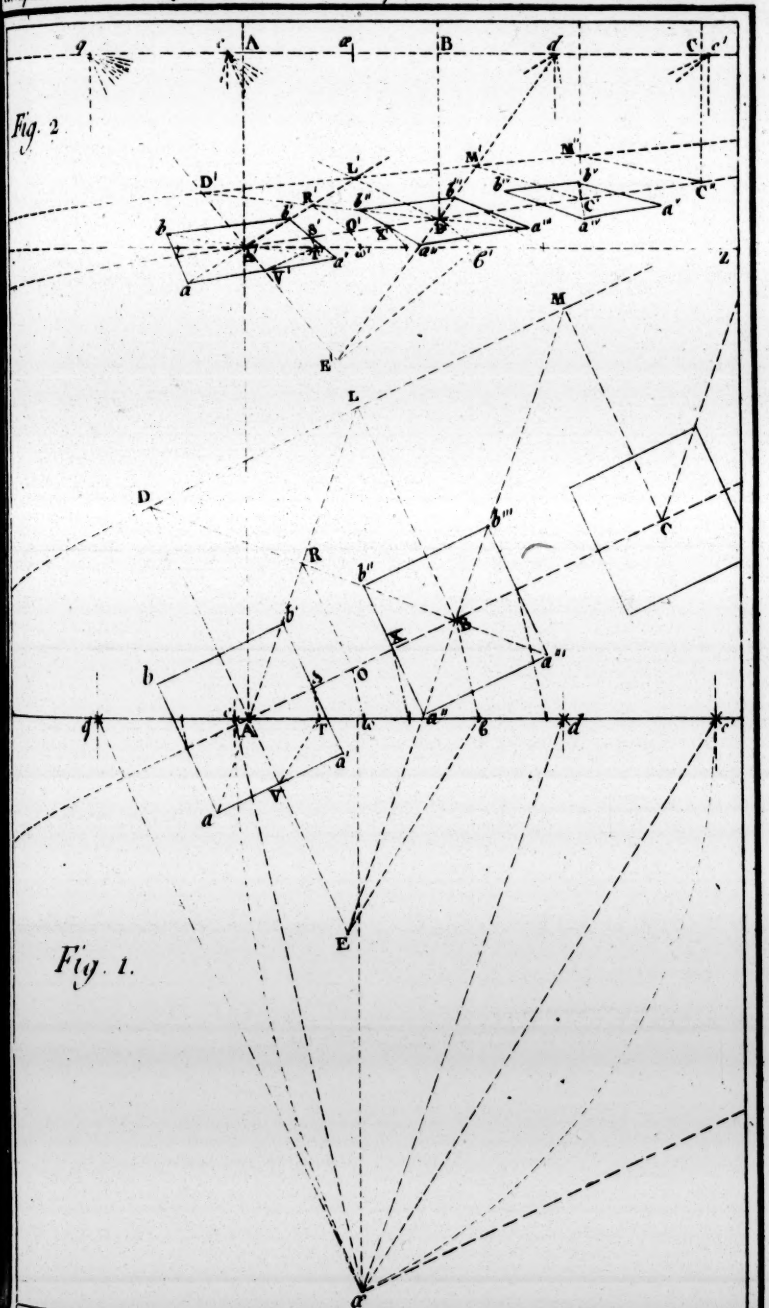
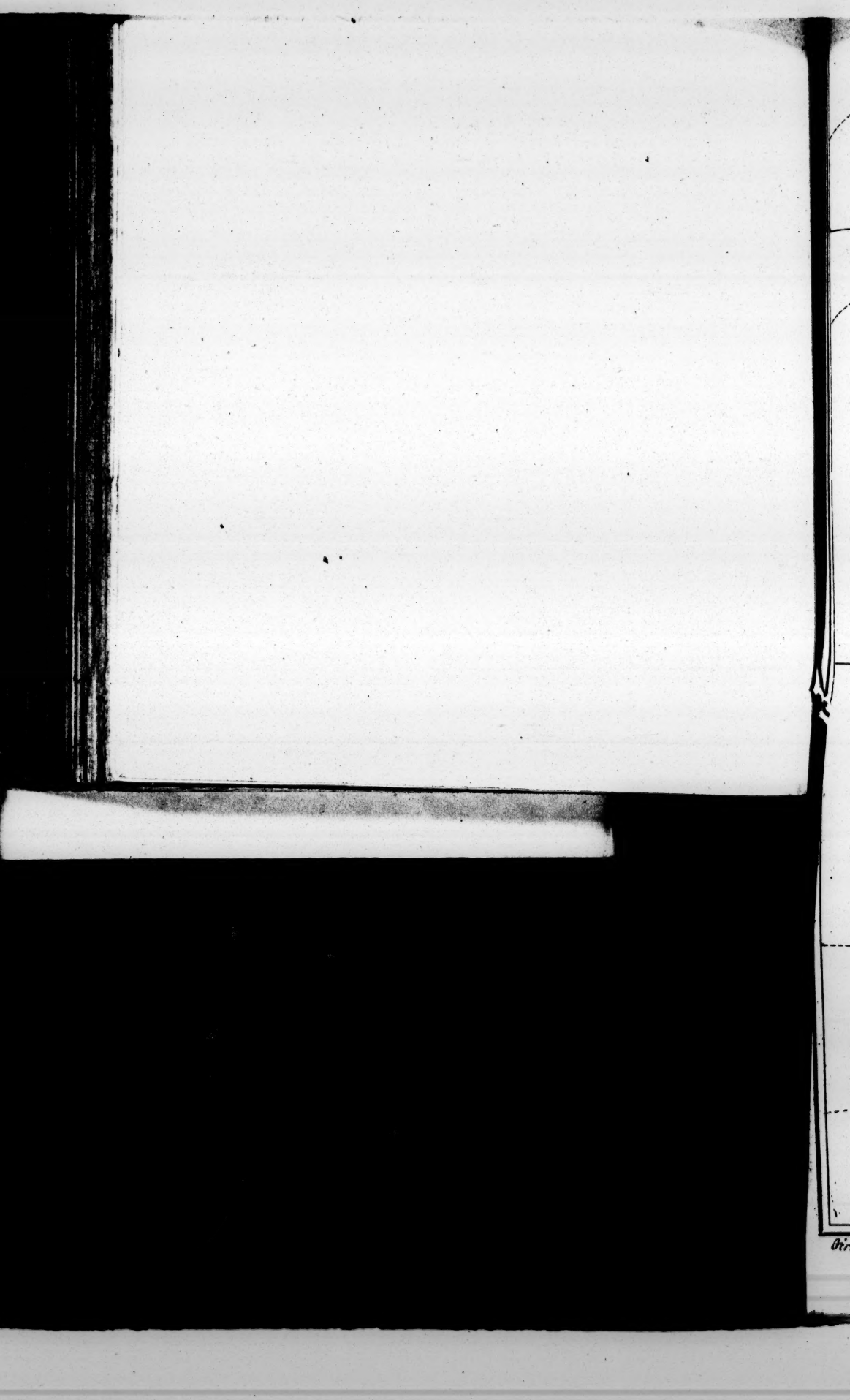


Fig. 2
Fig. 1.
Fig. 3.



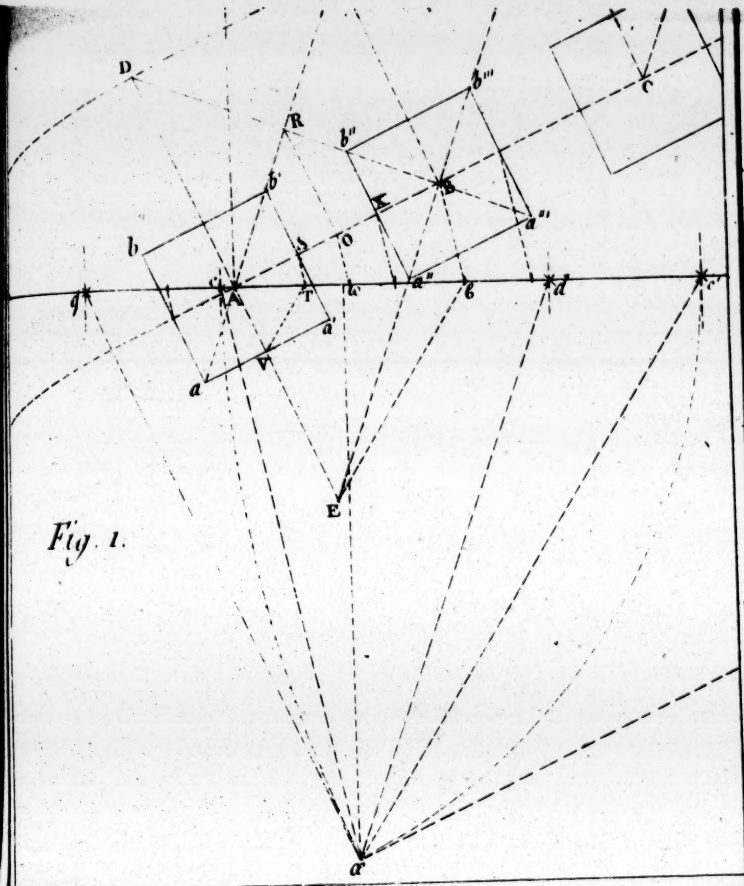
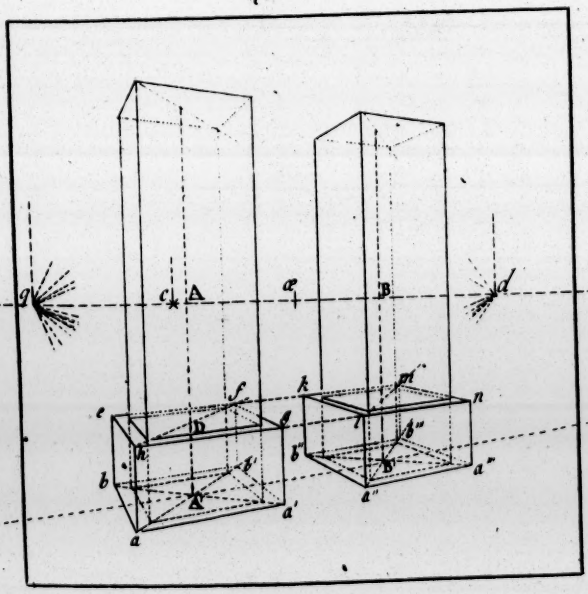


Fig. 1.

Fig. 3.



Pricard fecit